ＤＣＦ法の数学的基礎
（抄録版）

弁護士　松村昌人

序　文

本書は、DCF 法（Discounted Cash Flow Method）による事業価値算定の各種公式について、その数学的な導出過程について検証を加えたものである。読者層としては、数式による考察に馴染みが薄い文系出身の法律家を念頭に置いている。

企業価値の評価に用いる DCF 法については、既に多くの実務書籍があり、その利点・公式の使用方法・実務上の問題等は広く紹介されている。もっとも、これら実務書籍では、紙幅の関係から、数学的考察が省略されていることが多い。そこで、本書では、類書で省略されている数式を用いた DCF 法の各種公式導出部分に焦点を絞り、検討を加えることにした。

このような目的の書籍であるから、本書の扱う事項は、目次のとおり、もっぱら、DCF 法による事業価値算定公式の数学的導出過程に関するものである。逆に言えば、本書では、企業価値の評価実務で重要な項目であっても、数学的考察を特に要しない項目（財務諸表から FCF 導出までの加減項目、パラメータ選定における実務的配慮事項）、非事業資産加算・有利子負債控除に関する計算等については、ほとんど触れていない。それら事項の解説が必要な諸兄におかれては、参考文献として挙げた実務書籍の該当箇所にあたられたい。

本書では、以下のような執筆方針を採った。

１　DCF 公式の数学的導出過程を、１行１行、全部明示した。

数式の変形過程は、論理必然の部分である。本質的には同語反復に過ぎず、独立の思想的価値が式変形過程で付加されるわけではない。しかし、数式展開過程がとばされている書籍は、一見読みやすいものの、論理過程を検証したい読者としては、読みづらいのが実際である。そこで、本書では、単に代入する・移項する・括弧を外す・通分するだけ等といった単純作業過程であっても、これを記載省略することなく、式変形過程を極力全部記載することにした。このため式変形にかける行数が多くなったが、これにより、読者が、別途、紙と鉛筆を用意せずとも、本書を順に眺めていくだけで、論理展開を追いながら批判的検証を行えるようにした。

２　必要な数学公式は、必要となったときに、必要な範囲に限り、説明をした。

数学公式を用いて計算を省力化する箇所では、その公式の導出をしておいた。すなわち、本書内部で公式の導出を完結し、別途の参考書籍を併読する必要がないようにした。また、公式の導出は、その公式を用いる必要がある場面で、おこなった。すなわち、公式の使用用途や必要性が不明な時点で、いきなり数学の公式証明が始まるという記述方式は排した。本書に記載した公式の導出は、もとより、厳密な証明でないが、読んで理屈上の納得が得

られやすいものとした。

３　具体的数字での計算例、Excel 表、グラフを併用した。

本書の多くの部分は数式の記載からなるが、あわせて、具体的数字を用いた計算例を適宜追加した。また、視覚的・直感的な理解の促進のため、Excel 表やグラフも併用した。数学言語は、全世界的に規格化・標準化された強力な思考道具・思想表現手段ではあるが、抽象度合いが強いため、背後の具体的事象を想像しにくいという難点がある。このため、抽象的な数式の展開と証明だけの書籍は、読者に誤解を生じさせ得ると考え、このような併用記載の方針を採った。

本書は、平成２９年冬に実施した第二東京弁護士会倒産法研究会での発表資料「ＤＣＦ法による事業譲渡価格」をベースにしている。同資料については、原案作成段階から発表後に至るまで、複数の弁護士・研究者・公認会計士から貴重な指摘と助言を頂いた。ここに深く感謝を申しあげる。本書は、数式部分が多いので、読みにくいような印象を受けるかも知れないが、内容自体は平易なものである。多くの読者から、更なる批判や改善点の指摘を頂ければ、幸いである。

平成３０年３月
弁護士　松村昌人

目　次

序文 ……2
参考文献 ……6
基本枠組みの図解（事業価値／企業価値／株主価値） ……7

１　第１事業年度末にあるフリー・キャッシュ・フローの現在価値 ……8
２　第Ｎ事業年度末にあるフリー・キャッシュ・フローの現在価値 ……10
３　第１～第Ｎの各事業年度のフリー・キャッシュ・フローの合計（計算原理） ……12
４　第１～第Ｎの各事業年度のフリー・キャッシュ・フローの合計（公式化） ……14
５　永続価値（第１～第∞の各事業年度のフリー・キャッシュ・フローの合計） ……17
６　各事業年度のフリー・キャッシュ・フローが異なる場合 ……18
７　各事業年度のフリー・キャッシュ・フローが一定割合で漸増する場合 ……21
８　永続価値（漸増する第１～第∞の各事業年度の FCF の現在価値合計） ……25
９　二分法 ……29
１０　R（期待利回り） ……38
１１　$WACC$ ……40
１２　株主資本コストk_e ……46
１３　マーケット・リスク・プレミアム ……49
１４　CAPM モデル（概論） ……57
１５　β値の導出（概論） ……61
１６　単回帰分析 ……65
１７　二変数関数と偏微分 ……71
１８　平方完成 ……86
１９　β値の一般解（最小二乗法） ……89
２０　トヨタ自動車のβ値 ……97
２１　β値の一般解（平方完成） ……102
２２　β値の一般解（分散、平均値） ……105
２３　CAPM モデルの論証 ……117
２４　β値の Excel 計算 ……136
２５　非上場企業のβ値 ……139
２６　有利子負債子コストk_d ……155
２７　負債 D／株主資本 E ……168

巻末資料（ＤＣＦ法を扱った裁判例の抜粋）

定義・公式索引 ……………………………………………………………………………………217
事項索引 ………………………………………………………………………………………………223

（１７７頁以降は本抄録版では割愛した）

参考文献

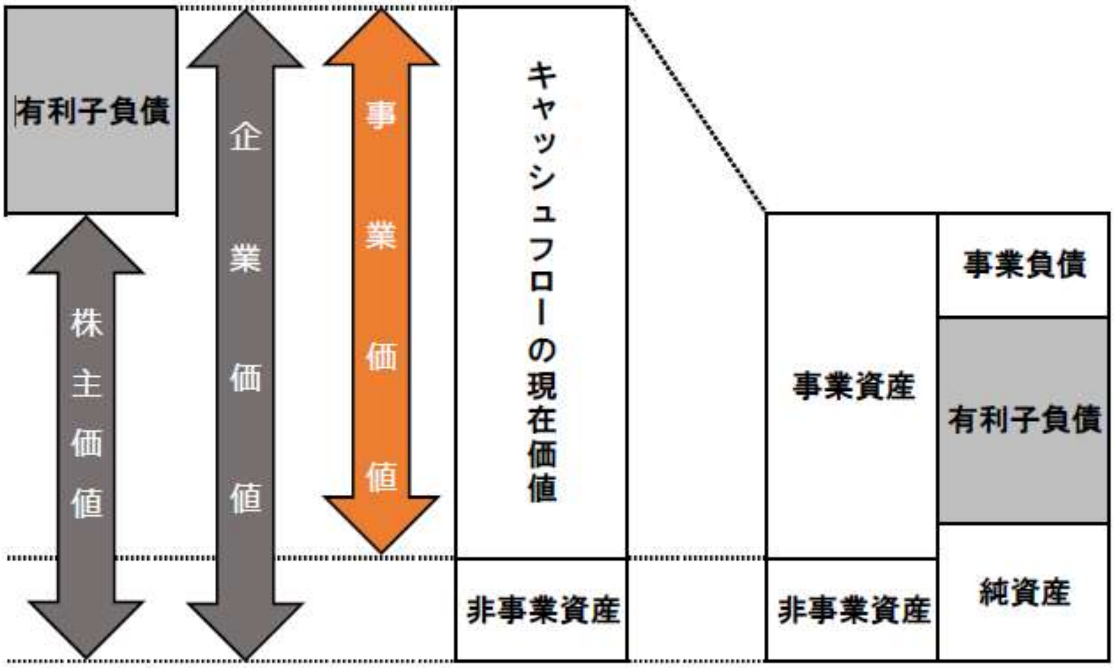
A　マッキンゼー・アンド・カンパニー「企業価値評価（上、下）［第６版］」ダイヤモンド社、２０１６年（McKinsey & Company Inc., Tim Koller, Marc Goedhart, David Wessels. 2015. Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies. 5th ed. Wiley Finance の邦訳版）

B　Richard A. Brealey, Stewart C. Myers, Franklin Allen. 2016. Principles of Corporate Finance. 12th ed. Mcgraw-Hill（日経ＢＰ社より２０１４年に第１０版の邦訳が出版されている）

C　日本公認会計士協会「企業価値評価ガイドライン（改訂版）」日本公認会計士協会出版局、２０１３年

D　株式会社プルータス・コンサルティング「企業価値評価の実務 Q&A（第３版）」中央経済社、２０１４年

基本枠組みの図解　（事業価値／企業価値／株主価値）



注：参考文献Ｃの３８頁記載の図表をもとに作成した。

事業価値　　…事業の価値。将来得られる利益（現金ベース）を現在の価値に換算したもの。事業譲渡の代金を定める際の基準となる。本書で扱う対象。

企業価値　　…事業価値に非事業用資産を加算したもの。会社全体の評価額。[1]

株主価値　　…企業価値から有利子負債等を控除した残額。発行済みの流通株式数で割ることにより１株あたりの価値を算出できる。裁判例多数あり。

非事業用資産…事業と直接関係がない資産。会計上、売上高や営業利益に含まれない収入を生む資産。例：余剰現金。市場性のある有価証券。非連結会社への少数株主としての出資持分。遊休不動産。[2] [3]

有利子負債等…株主に帰属しない請求権（非株式請求権）。事業 *FCF* に考慮されていない負債。例：有利子負債。退職給付債務の積立不足分。資産計上したオペレーティング・リース。従業員向けストック・オプション。[4] [5]

---

[1] 非事業用資産は事業には直接関係しないが、その市場価値は個別に存在するので、同価値を事業価値に加えて、企業価値を算定する。参考文献Ａ上巻３６９頁

[2] 参考文献Ａ上巻１７７頁、３６９～３７６頁、３６９頁図表。参考文献Ｄ５～７頁。

[3] 事業用不動産の価値は、事業価値の計算に含まれるので、二重計上はしない（参考文献Ａ上巻３６７頁の注１、３７５頁）。資産簿価に、将来の経済利益を全部足したものが事業価値（参考文献Ａ上巻４６１頁）。

[4] 参考文献Ａ上巻１７７～１７８頁・３７７～３８９頁。参考文献Ａ下巻２０章。

[5] 過剰債務企業・財務状況悪化企業は、債務不履行リスクが有利子負債の価値を左右するとの指摘として参考文献Ａ上巻３６８頁の注２。企業価値から負債額面価値を控除する結果、株主価値が影響を受けるとするものとして参考文献Ａ上巻３７８～３７９頁。

１　第１事業年度末にあるフリー・キャッシュ・フローの現在価値

１年度期首に資金１００万円があるとき、期待利回りを６パーセントとすると、１年度期末（２年度期首）には１０６万円が存在していることが期待される。これを数式で表現すると、以下のとおりである。

$$100\text{万円} \times (1 + 0.06) = 106\text{万円}$$

同様に、ある事業の１年度の期末にあるフリー・キャッシュ・フローを FCF とし、期待利回りを R パーセントとすると、期末時点での FCF と、その FCF の１年度期首を評価時点とする現在価値との間には、以下の関係がある。

$$\text{現在価値} \times (1 + R) = FCF$$

FCF の定義は、企業の事業から生み出されるキャッシュ・フローで新規の投下資産を差し引いた残額（事業からフリーとなったキャッシュ・フロー）とする。具体的には、以下のものを FCF と想定する。[6]

$FCF =$ みなし税引後営業利益 ＋非現金支出性営業費用 $-$ 純投資[7]

この式の加減要素を個別に見ると、以下のとおりである。

・みなし税引後営業利益　…$NOPLAT$。[8]　企業の事業から生み出される売上高から営業費用・固定資産減価償却費を控除した利益（$EBITA$）[9] から、その事業に関連する法人税を差し引いたもの。実際の法人税は、営業利益の導出後に更に加減処理を施した利益について課税されることから、「みなし」と形容して区別した。

・非現金支出性営業費用　…例えば、減価償却費は、営業利益の時点で売上から控除されている科目であるが、減価償却費を計上した事業年度に新たに外部資金流出が発生するわけではない（投資時に既に支出済みのため）。よって、FCF の計算上は、いったん控除した減価償却費は足し戻す。

・純投資　……………………新規投資をした時点で資金は流出するが、投資の属する事業年度に費用計上されるわけではない（その後、数年にわたっ

---

[6] 参考文献Ａ上巻の２０６～２０７頁。参考文献Ｄ８２、９５～９７頁では資本的支出を更に控除する。

[7] 純投資＝$t+1$ 期の投下資産（事業用有形固定資産、運転資本）－t 期の投下資産。

[8] Net Operating Profit Less Adjusted Taxes の略称。参考文献Ａ上巻２０４～２０６頁。

[9] Earnings Before Interest, Taxes, and Amortization の略称。営業利益だが、利息・法人税・埋め合せ用償却（無形資産償却）を未反映の段階のもの。

て減価償却費として費用計上される)。このため、投資した事業年度の営業利益には支出額が未計上である。よって、FCF の計算上は、控除項目となる。逆に、有形固定資産の売却により現金化がされれば FCF 上はプラスになる。純投資はその差額である。

ここで、上記の式

$$FCF = \text{みなし税引後営業利益}+\text{非現金支出性営業費用} - \text{純投資}$$

の両辺を(1＋R)で除すると、[10]

$$\text{現在価値}＝\frac{FCF}{1+R}$$

である。例えば、一度きりの催事が平成２９年に実施されて総売上金から初期投資費用[11]・諸経費・税金を控除した結果で、平成２９年１２月末時点で金１０００万円が催事終了後は手元に残るという計画の場合(プランＡとする)、新たに生み出されるフリーなキャッシュ・フローは同年末時点で金１０００万円であるが、これを平成２９年正月の計画時点における評価額へと変換すれば、期待利回りを商事法定利率である年６％(商法５１４条)として、[12]

$$FCF＝10{,}000{,}000$$
$$R＝0.06$$

を代入し、

$$\text{現在価値}＝\frac{10{,}000{,}000}{1+0.06}$$
$$= 9{,}433{,}962\text{円}$$

と計算できる。

[10] ０で除算することは定義されていないが(割る数字が０である計算は想定外)、期待利回り R は、正の数であるから、$1+R$ は０ではないので、割算が実行できる。本書でも、たびたび除算が出てくるが、割る数字は、いずれも０ではないという前提である。

[11] 初期投資費用は、後述するとおり、実際には、マイナスの FCF として把握して、DCF 方式で計算する

[12] 企業評価で用いられる期待利回りとしては、後述の $WACC$ が用いられる。$WACC$ は対象企業によって異なる。例えば、文献Ａ上巻の３２８頁では、UPS(米国の小口貨物輸送会社)の $WACC$ を８％と試算している。

２　第N事業年度末にあるフリー・キャッシュ・フローの現在価値

同様にして、ある事業の２年度の期末のFCF_2を、同事業の１年度期首を評価時点として現在価値を出すためには、複利計算で、

$$現在価値 \times (1+R) \times (1+R) = FCF_2$$

すなわち、

$$現在価値 \times (1+R)^2 = FCF_2$$

の関係があるので、両辺を　$(1+R)^2$　で除して、

$$現在価値 = \frac{FCF_2}{(1+R)^2}$$

となる。[13]

例えば、先のプランＡと似た設例を用いれば、一度きりの催事が平成２９年初めから平成３０年末までの２年間に実施されて総売上金から初期投資費用・諸経費・税金を控除した結果で、平成３０年１２月末時点で金１０００万円が催事終了後は手元に残るという計画の場合（プランＢ）、新たに生み出されるフリーなキャッシュ・フローは同年末時点で金１０００万円であるが、これを平成２９年正月の計画時点における評価額へと変換すれば、期待利回りを商事法定利率である年６％として、

$$FCF = 10{,}000{,}000$$
$$R = 0.06$$

を代入し、

$$現在価値 = \frac{10{,}000{,}000}{(1+0.06)^2}$$
$$= 8{,}899{,}964 円$$

と計算できる。つまり、同じ金１０００万円の手残金が生ずる催事であっても、プランＢの評価はプランＡの評価よりも劣っている。

同様に、ある事業の３年度末のFCF_3の１年度期首における現在価値は、

$$現在価値 = \frac{FCF_3}{(1+R)^3}$$

となる。

以下、同様にして、ある事業のN年度末のフリー・キャッシュ・フローをFCF_Nとすると、その１年度期首における現在価値（Present Value）は、

---

13 実際には、FCFは、年度末に突然発生するわけではなく、年度を通じて散発的に発生する。これを年度内に平均的に発生するとみなして、割引率も、FCF_1については、１乗ではなく、０．５乗とし、FCF_2も１．５乗で割り引く手法（期央主義）もある。参考文献Ｄ１２６～１２７頁。

$$現在価値（Present\ Value）＝\frac{FCF_N}{(1+R)^N}$$

　となる。この式は、任意の N 年を代入すれば、現在価値を求めることができる汎用性を有している。例えば、平成２９年初めから、（年号も新しくなった）半世紀後の未来までのの間に実施される遠大なプロジェクトの結果、半世紀後に金１０００万円が手元に残るという場合（プランＺ）、新たに生み出されるフリーなキャッシュ・フローは同時点で金１０００万円であるが、これを平成２９年正月の計画時点における評価額へと変換すれば、期待利回りを（現行）商事法定利率である年６％として、

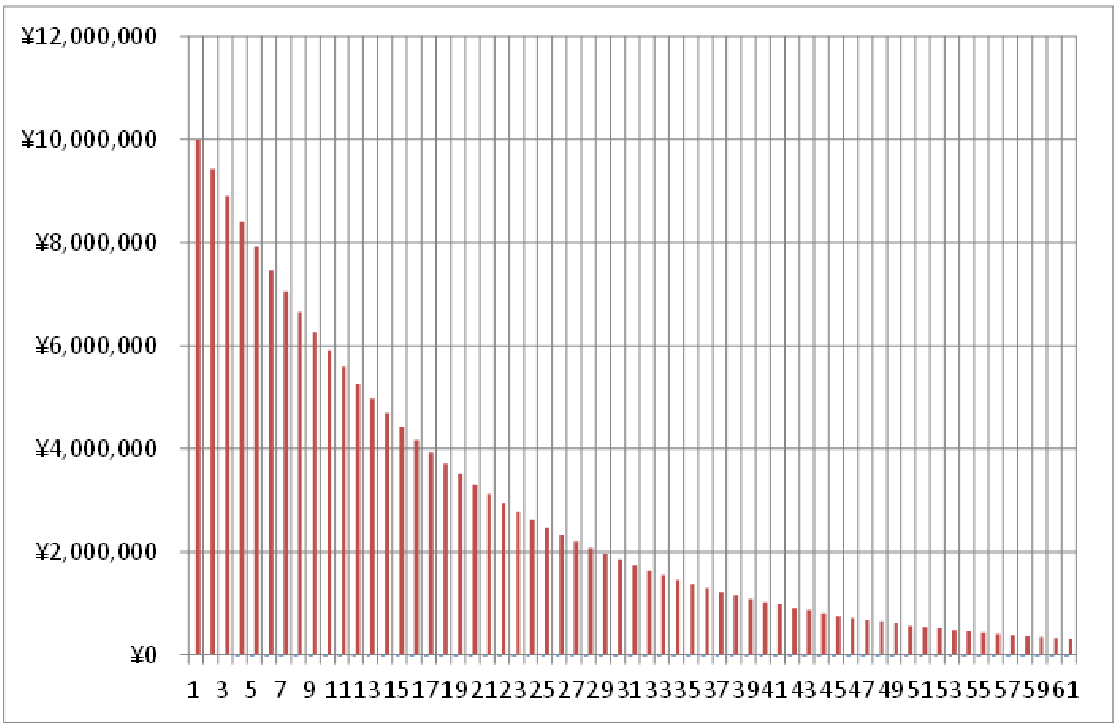
$$FCF＝10{,}000{,}000$$
$$R＝0.06$$
$$N＝50$$

を代入し、

$$現在価値＝\frac{10{,}000{,}000}{(1+0.06)^{50}}$$
$$=542{,}884\ 円$$

と計算できる。つまり、同じ金１０００万円の手残金が生ずる催事であっても、プランＺの評価はプランＡやプランＢの評価よりも著しく劣っている。

（参考）数年後～数十年後時点の金１０００万円を年率６％で現在価値にしたもの



３　第１～第 N の各事業年度のフリー・キャッシュ・フローの合計（計算原理）

企業が保有する事業は、単発の催事ではなく、継続的に維持される。その結果、新たに生み出されるフリーなキャッシュ・フローが毎年生ずる（とは限らないが、そのような優良企業を当面は想定する)。[14]　この場合、第１期末にも FCF が生じ、第２期末にも FCF が生じ、第３期以降も同様に FCF が生ずる。毎期生ずる FCF の金額は区々となるであろうが、計算の簡便のため、ほぼ同額の FCF が毎年生み出されると仮定して、その現在価値を考えてみる。各年の FCF の現在価値は、前述したとおりであるから、単純に、これら現在価値を合計すれば、ある事業のある期間の FCF の現在価値の和がわかるはずである。すなわち、１年度期首から N 年度期末までの N 年間の FCF の現在価値の合計額は、

$$\text{現在価値の合計額}=\frac{FCF}{1+R}+\frac{FCF}{(1+R)^2}+\frac{FCF}{(1+R)^3}+\cdots+\frac{FCF}{(1+R)^N}$$

となる。これは、毎年、定額の FCF を生む事業の N 年間の現在価値である。

合計をΣ表記すると、[15] 上式の右辺は、

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{N}\frac{FCF}{(1+R)^n}$$

と短縮形で表現することができる。これは表現形式が変わっただけであり、指し示す思想内容は同じである（実際の計算作業量は変わらない)。

例えば、以下のような単一事業の場合を想定する。みなし税引き後営業利益は初年度において１億円で毎期同じである。純投資も売上を維持するため毎期同額の２５００万円を注ぎ込んでおり、その結果、差し引きで FCF は初年度から５年度まで継続的に７５００万円との計画である。この場合の利回りを年６％とすると、FCF の現在価値は、最下段の数値となる。これを合計すると、５年間分の現在価値が算出される。

---

[14] 例えば、銀行返済も株式配当もしていないのに現預金残高が毎年５０００万円前後で推移しており殆ど変動がないという会社の事業は、要するに、現預金が増加していないのであり、新たに生み出される FCF は毎期０円である。

[15] 記号Σは、シグマ (Sigma)と呼称する。要素を全部足し合わせるという意味。

計画時からの年数	年	1	2	3	4	5		
みなし税引後営業利益	百万円	100	100	100	100	100	A	前期比０%増
純投資	百万円	25	25	25	25	25	B	前期比０%増
ＦＣＦ	百万円	75	75	75	75	75	C	=A-B
割引率	率	1.06	1.12	1.19	1.26	1.34	D	利回り６%換算
ＦＣＦの現在価値	百万円	71	67	63	59	56	E	=C/D

同じことを計算式で示すと、以下のとおりとなる。（単位：万円）

$$\sum_{n=1}^{5}\frac{7500}{(1+0.06)^n}=\frac{7500}{1+0.06}+\frac{7500}{(1+0.06)^2}+\frac{7500}{(1+0.06)^3}+\frac{7500}{(1+0.06)^4}+\frac{7500}{(1+0.06)^5}$$

$$=\frac{7500}{1.06}+\frac{7500}{1.12}+\frac{7500}{1.19}+\frac{7500}{1.26}+\frac{7500}{1.34}$$

$$=7075+6675+6297+5941+5604$$

＝3 億 1593 万円

この事業は、（FCF の現在価値は低下傾向にあるが）FCF を生み続けており、６年目で事業を廃止すべき経済的理由が見当たらなければ、６年目以降も事業を継続することになるであろう。仮に限界まで事業を継続した場合（１年度、２年度…無限年度と事業を継続した場合）、この事業の価値合計は何円となるか。それが、この事業の譲受を検討している外部者（同じ割引率で投資資金を調達している企業）の評価となりうるだろう。

この点、電子計算機の限界まで計算を続けるなり、１円未満の項が現れるまで手計算を続けるなりといった力任せの手法もありうるところであるが、以下では、上記演算を簡易にできる手法を検討する。

４　第１～第 N の各事業年度のフリー・キャッシュ・フローの合計（公式化）

前項で扱った式の括弧内を計算して、「…」部分を除いた式にしたい。先ず、同式の右辺は、分子が FCF と共通であるから、以下のように変形できる。

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{N}\frac{FCF}{(1+R)^n}=FCF\left(\frac{1}{1+R}+\frac{1}{(1+R)^2}+\frac{1}{(1+R)^3}+\cdots+\frac{1}{(1+R)^N}\right)$$

$$=FCF\left(\left(\frac{1}{1+R}\right)+\left(\frac{1}{1+R}\right)^2+\left(\frac{1}{1+R}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{1+R}\right)^N\right)$$

括弧内を簡略化するために、

$$r=\frac{1}{1+R}$$

と表記すると、

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{N}\frac{FCF}{(1+R)^n}=FCF(r+r^2+r^3+\cdots+r^N)$$

となる。括弧内を S と置いて、以下の処理をおこない、S を求める（…部のない形の式を求める)。すなわち、

$$S=r+r^2+r^3+\cdots+r^N$$

としたうえで、この式の両辺を r で割ると、

$$\frac{S}{r}=1+r+r^2+\cdots+r^{N-1}$$

となるので、この二つの式について、（上の式）－（下の式）を計算すると、

$$S-\frac{S}{r}=(r+r^2+r^3+\cdots+r^N)-(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{N-1})$$

$$S\left(1-\frac{1}{r}\right)=r^N-1$$

$$S\left(\frac{r-1}{r}\right)=r^N-1$$

$$S=\frac{r(r^N-1)}{r-1}$$

$$S = \frac{r(1-r^N)}{1-r}$$

となる。

これは等比数列の和の公式において、初項 a が公比 r に等しい場合と同じである。

（参考：等比数列の和の公式）[16]

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$
$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

S を求めることができたので、これを基に、再度、定額の現預金増加高（フリー・キャッシュ・フロー）を毎年に生む事業の N 年間の現在価値を Σ 表記すると、

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \frac{FCF}{(1+R)^n} = \frac{FCF}{1+R} + \frac{FCF}{(1+R)^2} + \frac{FCF}{(1+R)^3} + \cdots + \frac{FCF}{(1+R)^N}$$
$$= FCF\left(\frac{1}{1+R} + \frac{1}{(1+R)^2} + \frac{1}{(1+R)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+R)^N}\right)$$
$$= FCF\left(\left(\frac{1}{1+R}\right) + \left(\frac{1}{1+R}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+R}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{1+R}\right)^N\right)$$
$$= FCF(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N)$$
$$= FCF \times S$$
$$= FCF \times \frac{r(1-r^N)}{1-r}$$
$$= FCF \times \frac{\frac{1}{1+R}(1 - \left(\frac{1}{1+R}\right)^N)}{1 - \frac{1}{1+R}}$$

[16] 同公式は、以下のとおり証明できる。

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

S_n に r をかけると、

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

上式から下式を引くと、

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$
$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$
$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= FCF \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1+R}\right)^N}{1 + R - 1}$$

$$= FCF \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1+R}\right)^N}{R}$$

となり、無事に、「…」部分を除いた式を導出できた。

　この式が正常に稼働することの一例として、上記の設例（FCF は初年度から５年度まで安定的に同額の７５００万円、割引率を年６％との設例）の５年間分の現在価値を算出してみると、

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{5} \frac{7500}{(1+0.06)^n} = 7500 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0.06}\right)^5}{0.06}$$

$$= 125000 \times (1 - \left(\frac{1}{1.06}\right)^5)$$

$$= 125000 - \frac{125000}{(1.06)^5}$$

$$= 125000 - 93407$$

＝3 億 1593 万円

以上のとおり、前述した場合と同様の演算結果が得られた。

５　永続価値（第１～第∞の各事業年度のフリー・キャッシュ・フローの合計）

次に、毎期同額の FCF を生む状態が永遠に続くと仮定した場合における現在価値を考えたい。すなわち、

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{N}\frac{FCF}{(1+R)^n}=FCF\times\frac{1-\left(\frac{1}{1+R}\right)^N}{R}$$

の式において、N を∞とした場合（N＝∞）を考える。
この場合、上記式の右辺のうち、

$$\left(\frac{1}{1+R}\right)^N$$

の部分は、N→∞とすると、０になる。
すなわち、

$$R>0$$
$$1+R>1$$
$$\frac{1}{1+R}<1$$
$$\left(\frac{1}{1+R}\right)^\infty=0$$

となる。よって、

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\frac{FCF}{(1+R)^n}=FCF\times\frac{1-0}{R}$$

$$=\frac{FCF}{R}$$

となる。[17]

この式を設例（FCF は初年度から永続的に同額の７５００万円、割引率は年６％との設例）に適用して、永続価値を算出してみると、

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\frac{7500}{(1+0.06)^n}=\frac{7500}{0.06}$$

$$=\text{ 12 億 5000 万円}$$

となる。

[17] 参考文献Ｂの２７頁注４には、Present Value = Cash flow / Return について同趣旨の疑似証明がある。しかし、数学では、極限をとる操作を介して導出する。

６　各事業年度のフリー・キャッシュ・フローが異なる場合

これまでは、計算の簡略化のため、FCF は毎期一定額であるとの仮定を置いておいた。しかし、実際には FCF が毎期同額であるとする事業計画ばかりではない。そこで、以下では毎期の FCF が異なるとの前提にたった計算方法を確認する。

例えば、ある事業の１年度末のフリー・キャッシュ・フローを FCF_1 とし、[18] 期待利回りを R とすると、その１年度期首における現在価値１とは、

$$\text{現在価値１} \times (1+R) = FCF_1$$

の関係にあるので、両辺を（1＋R）で除して、

$$\text{現在価値１} = \frac{FCF_1}{1+R}$$

として現在価値１を逆算できる。同様に、ある事業の第２年度末のフリー・キャッシュ・フローを FCF_2 とすると、

$$\text{現在価値２} = \frac{FCF_2}{(1+R)^2}$$

となる。以下、同様に、

・第３年度末のフリー・キャッシュ・フローを FCF_3
・第 N 年度末のフリー・キャッシュ・フローを FCF_N

とすると、その１年度期首における現在価値は、各々、

$$\text{現在価値３} = \frac{FCF_3}{(1+R)^3}$$

……

$$\text{現在価値}N = \frac{FCF_N}{(1+R)^N}$$

となる。これら現在価値を合計すると、ある事業の１年度期末から N 年度期末までの N 年間のフリー・キャッシュ・フローの現在価値の合計額が算出でき、

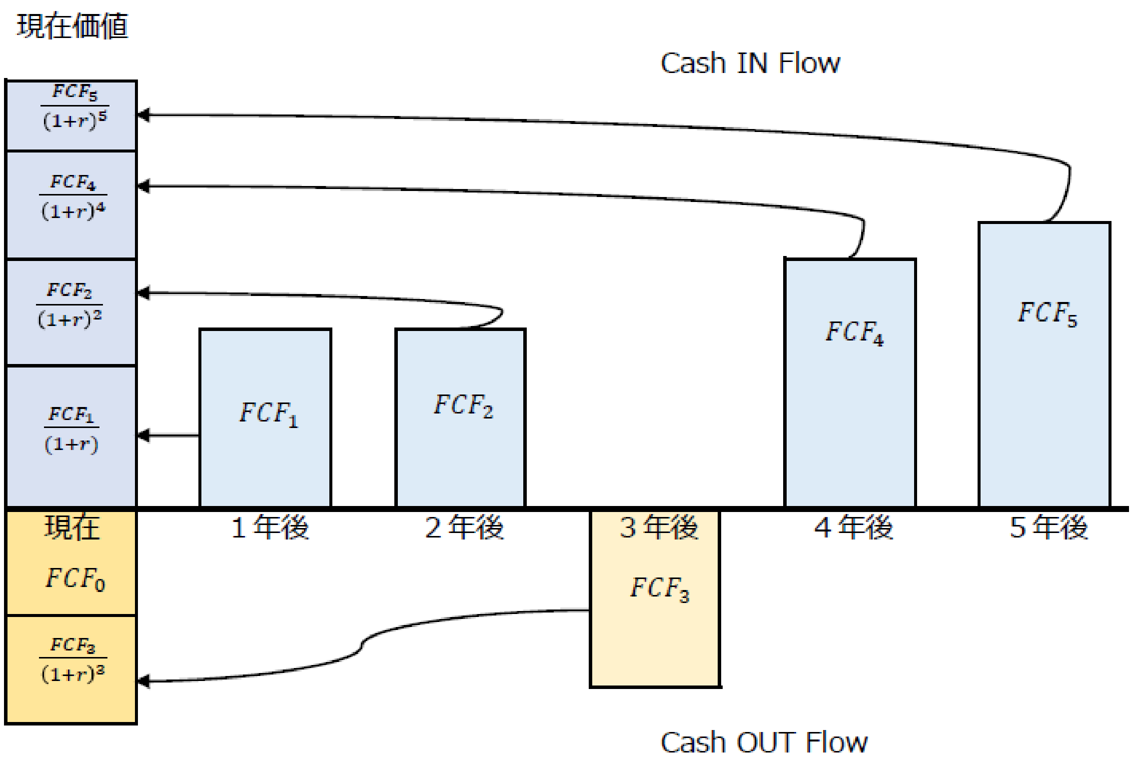
$$\text{現在価値の合計額} = \frac{FCF_1}{1+R} + \frac{FCF_2}{(1+R)^2} + \frac{FCF_3}{(1+R)^3} + \cdots + \frac{FCF_N}{(1+R)^N}$$

---

[18] FCF_2 で「第２事業年度期末のフリーキャッシュフローとしての〇〇万円」という特定の数値を指す。FCF×2 という掛け算の式を示すものではない。FCF_3 等も同様である。

となる。

この式は、分子が異なる数字であるので、これ以上は数学的処理による簡略化はできないが、具体的数値が判明すれば、演算は実行可能である。この演算の実行イメージは、以下の参考図解のとおりであり、ＤＣＦ法では、収入（IN）だけでなく支出（OUT）も同一計算式で現在価値に換算して、合算値で投資の可否を判断することになる。



具体的数字で検証してみる。例えば、以下のような事業の場合（営業利益はランダムに動いており、純投資も多い年度と少ない年度が混在している。その結果、差し引きで *FCF* は上下に変動している）、*FCF* の現在価値は、個別に計算をして最下段の数値となる。これを合計すると、５年間分の現在価値が算出される。

計画時からの年数	年	1	2	3	4	5		
みなし税引後営業利益	百万円	100	90	110	100	95	A	
純投資	百万円	25	30	30	20	25	B	
ＦＣＦ	百万円	75	60	80	80	70	C	=A-B
割引率	率	1.06	1.12	1.19	1.26	1.34	D	利回り６％換算
ＦＣＦの現在価値	百万円	71	53	67	63	52	E	=C/D

同じことを計算式で示すと、以下のとおりとなる。（単位：万円）

$$\sum_{n=1}^{5}\frac{FCF_n}{(1+0.06)^n}=\frac{7500}{1+0.06}+\frac{6000}{(1+0.06)^2}+\frac{8000}{(1+0.06)^3}+\frac{8000}{(1+0.06)^4}+\frac{7000}{(1+0.06)^5}$$

$$=\frac{7500}{1.06}+\frac{6000}{1.12}+\frac{8000}{1.19}+\frac{8000}{1.26}+\frac{7000}{1.34}$$

＝$7075+5340+6717+6337+5231$

＝3 億 0700 万円

他方で、以下のような不採算事業の場合（営業利益は現況赤字。純投資を復活させることで数年後の黒字転換を目指す場合）、*FCF* の現在価値は、個別に計算をして最下段の数値となる。これを合計すると、５年間分の *FCF* の現在価値が算出されるが、負の値である（計画６年目以降の収益計画もないと営業の譲り受け先を探すのが困難）。

計画時からの年数	年	1	2	3	4	5		
みなし税引後営業利益	百万円	▲ 5	▲ 2	0	5	10	A	
純投資	百万円	0	3	3	4	5	B	
ＦＣＦ	百万円	▲ 5	▲ 5	▲ 3	1	5	C	=A-B
割引率	率	1.06	1.12	1.19	1.26	1.34	D	利回り６%換算
ＦＣＦの現在価値	百万円	▲ 5	▲ 4	▲ 3	1	4	E	=C/D

同じことを計算式で示すと、以下のとおりとなる。（単位：万円）

$$\sum_{n=1}^{5}\frac{FCF_n}{(1+0.06)^n}=\frac{-500}{1+0.06}+\frac{-500}{(1+0.06)^2}+\frac{-300}{(1+0.06)^3}+\frac{100}{(1+0.06)^4}+\frac{500}{(1+0.06)^5}$$

$$=\frac{-500}{1.06}+\frac{-500}{1.12}+\frac{-300}{1.19}+\frac{100}{1.26}+\frac{500}{1.34}$$

＝$-472-445-252+79+374$

＝-716 万円

7　各事業年度のフリー・キャッシュ・フローが一定割合で漸増する場合

各事業年度のフリー・キャッシュ・フローが異なるときでも、その異なり具合が一定の法則に従っている場合は、計算式を簡略化することができる。例えば、ある事業の１年度末のフリー・キャッシュ・フローを FCF とし、第２事業年度におけるフリー・キャッシュ・フローが一定割合だけ増え、以降も同様の割合で増加していく場合を考える。増加率を g とした場合、各年度のフリー・キャッシュ・フローは、

- ・第１年度の FCF_1　…　FCF
- ・第２年度の FCF_2　…　$FCF\times(1+g)$
- ・第３年度の FCF_3　…　$FCF\times(1+g)^2$
- ・第４年度の FCF_3　…　$FCF\times(1+g)^3$

　　…

- ・第 N 年度の FCF_N　…　$FCF\times(1+g)^{N-1}$

となる。これを現在価値に換算したい。ここで、第１年度末の FCF を同年度期首の現在価値に換算する方法については、「１　第１事業年度末にあるフリー・キャッシュ・フローの現在価値」と同じである。すなわち、第１年度分の現在価値は、上記の FCF を $1+R$ で割れば良いので、

$$\frac{FCF}{1+R}$$

となる。第２年度の現在価値は、「２　第 N 事業年度末にあるフリー・キャッシュ・フローの現在価値」にあるとおり、上記の $FCF(1+g)$ を$(1+R)^2$ で割れば良いので、

$$\frac{FCF(1+g)}{(1+R)^2}$$

となり、以降も同様に、第 N 年度分の現在価値は、

$$\frac{FCF(1+g)^{N-1}}{(1+R)^N}$$

となる。

これらを全部合計すると、FCF の増加率を g とした場合における各年度のフリー・キャッシュ・フローの合計額、すなわち、企業評価額が求められる。具体的には、以下のとおりとなる。

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{N} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値} = \frac{FCF}{1+R} + \frac{FCF(1+g)}{(1+R)^2} + \frac{FCF(1+g)^2}{(1+R)^3} + \cdots + \frac{FCF(1+g)^{N-1}}{(1+R)^N}$$

この式の右辺を、前述の要領で、「…」部分を無くしていく。
共通する

$$\frac{FCF}{1+R}$$

で括りだすと、

$$= \frac{FCF}{1+R}\left(1 + \frac{1+g}{1+R} + \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^{N-1}\right)$$

括弧内を観察すると、初項が１で、公比が $\frac{1+g}{1+R}$ の等比数列の和である。

よって、前述した（１５頁）以下の公式を使用することができる。

（参考：等比数列の和の公式）

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

＊初項が a
＊公比が r

この公式を使用して、括弧内を変換すると、

$$= 1 + \frac{1+g}{1+R} + \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^{N-1}$$

$$= \frac{1\left(1 - \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^N\right)}{1 - \frac{1+g}{1+R}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^N}{1 - \frac{1+g}{1+R}}$$

よって、

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{N}} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値} = \frac{FCF}{1+R}\left(\frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^N}{1 - \frac{1+g}{1+R}}\right)$$

という「…」部分を無くした形に整理することができた。
　具体例で、この式を適用してみる。例えば、以下のような単一事業の場合を想定する。売上等はそれなりに順調に伸びているとして、みなし税引き後営業利益も初年度で１億円で以後も毎期５％伸びていくとする。純投資も売上を拡大するために毎期５％伸ばしており、その結果、差し引きで FCF は初年度が７５００万円で計画５年度では９１００万円に伸びるとの計画である。この場合の利回りを年６％とすると、FCF の計画１年目期首時点での現在価値は、最下段の数値となる。これを合計すると、５年間分の現在価値が算出される。

計画時からの年数	年	1	2	3	4	5		
みなし税引後営業利益	百万円	100	105	110	116	122	A	前期比５％増
純投資	百万円	25	26	28	29	30	B	前期比５％増
ＦＣＦ	百万円	75	79	83	87	91	C	=A-B
割引率	率	1.06	1.12	1.19	1.26	1.34	D	利回り６％換算
ＦＣＦの現在価値	百万円	71	70	69	69	68	E	=C/D

（上記の式を使用した場合）

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{N}} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値} = \frac{FCF}{1+R}\left(\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+R}\right)^{N}}{1-\frac{1+g}{1+R}}\right)$$

で、計画期間が５年間であるから、N＝５を代入。初年度 FCF＝７５００万円を代入。FCF は、みなし税引後営業利益－純投資であるから、FCF の成長率 g は、みなし税引後営業利益や純投資の前期比増率と同じで、g＝５％、利回 R は６％を用いる。

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{5} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値} = \frac{7500}{1+0.06}\left(\frac{1-\left(\frac{1+0.05}{1+0.06}\right)^{5}}{1-\frac{1+0.05}{1+0.06}}\right)$$

$$= 7075\left(\frac{1-(0.9906)^{5}}{1-0.9906}\right)$$

$$= 3\text{億}\ 4716\ \text{万円}$$

（上記の式を使用しない場合）
　各期の FCF を、上記条件に従い計算する。例えば、上記表の２年目の FCF は、前期７５００万円の５％増加であるから、正確には、以下のとおり７８７５万円である。

$$7500\ \text{万円} \times 1.05 = 7875\ \text{万円}$$

同様に３年目の FCF は、

$$7875\text{万円} \times 1.05 = 8268\text{万}7500\text{円}$$

である。以下、同様に５年目まで計算して、各年の *FCF* をひとまず計算する。そのうえで、以下のとおり、各年の *FCF* を割り引いたものを合算する。

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{FCF_n}{(1+0.06)^n} = \frac{7500}{1+0.06} + \frac{7875}{(1+0.06)^2} + \frac{8269}{(1+0.06)^3} + \frac{8682}{(1+0.06)^4} + \frac{9116}{(1+0.06)^5}$$

$$= \frac{7500}{1.06} + \frac{7875}{1.12} + \frac{8269}{1.19} + \frac{8682}{1.26} + \frac{9116}{1.34}$$

$$=7075 + 7009 + 6943 + 6877 + 6812$$

$$=3\text{億}4716\text{万円}$$

計算結果は、３億４７１６万円で一致している。

なお、上記設例からも推測できるとおり、*N* 年後の *FCF* の現在価値は、*N* が大きくなればなるほど減少していく。例えば、同じ設例で、５０年後～５００年後の *FCF* の現在価値は以下のとおりである。[19]

計画時からの年数	年	50	100	150	200	500		
みなし税引後営業利益	百万円	1,092	12,524	143,617	1,646,912	3,745,072,554,973	A	前期比５%増
純投資	百万円	273	3,131	35,904	411,728	936,268,138,743	B	前期比５%増
ＦＣＦ	百万円	819	9,393	107,713	1,235,184	2,808,804,416,230	C	=A-B
割引率	率	18.42	339.30	6,250.00	115,126	4,497,100,906,035.84	D	利回り６%換算
ＦＣＦの現在価値	百万円	44	28	17	11	1	E	=C/D

このため、計画期間を十分に永くとった場合でも、*FCF* の現在価値の合計値は無限大に発散するわけではなく、有限値に収れんしていくのではないかと予想される。同収れん値を求めることができれば、異なる成長率の *FCF* を生む事業であっても、同じ割引率で比較すれば、事業間の経済的価値の大小比較が可能になり、意思決定上、便利である。[20]　そこで、次項において、その計算式の導出を試みてみる。

[19] 世界最長の企業と言われる金剛組は、西暦５７８年に聖徳太子により百済より招かれた宮大工が創業したと言われ、以後、千数百年にわたり継続している。

[20] 現在価値に割り引くことにより、同一割引率により投資比較をする投資者にとっては、複数の投資予定事業の経済的価値の大小比較（優劣比較）が可能となる。もっとも、割引率は投資者によって異なるので、算出された数値が一般的・普遍的・客観的価値を示していると言えるかは、別論である。

８　永続価値（漸増する第１～第∞の各事業年度の FCF の現在価値合計）

これまでの議論から、第１年度の FCF が、以後、毎期にわたって成長率 g で増加していく場合、割引率を R とする第１～第 N 年度の各事業年度のフリー・キャッシュ・フローの現在価値の合計は、以下の式により算出できることが分かった。

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{N}} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値} = = \frac{FCF}{1+R}\left(\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+R}\right)^{N}}{1-\frac{1+g}{1+R}}\right)$$

これを踏まえて、第 N 年度までと言わず、永続的に事業をその調子で継続した場合の各事業年度の FCF の現在価値の合計値を求めたい。その数値が、同じ割引率（資金調達コスト）を採用する企業が同事業を買収する際の判断目線となる筈である。[21]

そこで、上記式で、N→∞　とした場合の計算式を考える。

ここで、

$$g < R$$

であるとすると、[22] [23]

$$1+g < 1+R$$

$$\frac{1+g}{1+R} < 1$$

なので、

$$\left(\frac{1+g}{1+R}\right)^{\infty} \to 0$$

よって、N→∞　とすると、

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値} = \frac{FCF}{1+R}\left(\frac{1-0}{1-\frac{1+g}{1+R}}\right)$$

---

[21] 実際には、永続価値の公式は、後述の二分法の個別予測期間経過後の落ち着いた時期（すなわち g が十分に低下している未来の事業年度）における残存価値の算出式として用いる。

[22] gについて、文献Ａ上巻の３０３頁では、各業界の長期成長率にインフレ率を加えたものが合理的予想であるとする。因みに、インフレ率調整後の売上高成長率の実績分布グラフ（文献Ａ上巻の１５２頁）では、０～５％の企業割合が３割に達している。

[23] Ｒは、通常、後述のWACCが用いられる。$WACC$ は対象企業によって異なる。文献Ａ上巻の３２８頁では、UPS（米国の小口貨物輸送会社）の $WACC$ を８％と試算している。

$$= \frac{FCF}{1+R}\left(\frac{1}{1-\frac{1+g}{1+R}}\right)$$

$$= \frac{FCF}{(1+R)\left(1-\frac{1+g}{1+R}\right)}$$

$$= \frac{FCF}{1+R-(1+g)}$$

$$= \frac{FCF}{R-g}$$

と簡易な形に変形することができた。

具体例で、この式を適用してみる。上記同様の設例を用いる（第１期末の *FCF* が７５００万円。*FCF* 成長率５％、割引率６％）。

計画時からの年数	年	1	2	3	…	∞		
みなし税引後営業利益	百万円	100	105	110	…	∞	A	前期比５%増
純投資	百万円	25	26	28	…	∞	B	前期比５%増
ＦＣＦ	百万円	75	79	83	…	∞	C	=A-B
割引率	率	1.06	1.12	1.19	…	∞	D	利回り６%換算
ＦＣＦの現在価値	百万円	71	70	69	…	0	E	=C/D

（上記の式を使用した場合）

$$\sum_{n=1}^{\infty} FCF_n \text{の現在価値} = \frac{7500}{0.06-0.05}$$

$$= \frac{7500}{0.01}$$

$$= 75\ \text{億円}$$

（上記の式を使用しない場合）

表上の無限未来における *FCF* の現在価値は、*FCF* も割引率もともに無限大である。よって、計算はできない。

ちなみに、第１期末の *FCF* が７５００万円だとしても *FCF* 成長率や割引率の設定次第で評価額は大きく変わる。例えば、別の設例として、*FCF* 成長率０％（すなわち毎期安定した *FCF* として７５００万円を生み出し続けるものの増加はしないという、ある意味で安定した

事業計画）で、割引率８％を前提とすれば、その現在評価額は（現時点で資金を投入して当該事業を買い取ろうとする人から見た評価額は）、

計画時からの年数	年	1	2	3	…	∞		
みなし税引後営業利益	百万円	100	100	100	…	100	A	前期比０％増
純投資	百万円	25	25	25	…	25	B	前期比０％増
ＦＣＦ	百万円	75	75	75	…	75	C	=A-B
割引率	率	1.08	1.17	1.26	…	∞	D	利回り８％換算
ＦＣＦの現在価値	百万円	69	64	60	…	0	E	=C/D

$$\sum_{n=1}^{\infty} FCF_{n}\text{の現在価値} = \frac{7500}{0.08-0}$$

$$= \frac{7500}{0.08}$$

$$= 9\text{億}3750\text{万円}$$

となる。

また、前述した事例であるが、銀行返済も株式配当もしていないのに現預金残高が毎年５０００万円前後で推移しており殆ど変動がないという会社の事業は、要するに、現預金が増加していないのであり、新たに生み出される *FCF* は毎期０円である。

計画時からの年数	年	1	2	3	…	∞		
みなし税引後営業利益	百万円	25	25	25	…	25	A	前期比０％増
純投資	百万円	25	25	25	…	25	B	前期比０％増
ＦＣＦ	百万円	0	0	0	…	0	C	=A-B
割引率	率	1.08	1.17	1.26	…	∞	D	利回り８％換算
ＦＣＦの現在価値	百万円	0	0	0	…	0	E	=C/D

この場合、上記の表にあるとおり、割引率にかかわりなく、その事業の現在価値は０円である（誰もその事業単独では有償では譲り受けない）。

もっとも、そのような事業のみで経営をしている会社であっても、当該５０００万円ほどの現預金が非事業資産として存在する以上、企業価値は５０００万円以上あるから、負債額が０円であれば、その全株式の評価は、５０００万円はすることになる。[24]　このような整理の観点は、７頁の「事業価値／企業価値／株主価値」で示した図版のような理解を前提としている。

[24] *CF*（現預金残高）と *FCF*（自由になった現預金）は、違う概念である。

この点、前述したように、売上高の２％程度の現金、拘束性預金については、事業用資産に分類（すなわち非事業用資産としての現金加算額が減る）する見解もあるが、[25]　現実の企業買収の局面において、現預金を一定額置いたまま譲渡先に引き渡すことは事業譲渡の円滑な実施のために当然の措置であるとしても、事業評価額の算出においては、現預金以外の収益事業体を評価して、現預金は別途計算としても、特に支障はない（契約としては、クロージング後の精算条項を置けばよい)。[26]

---

[25] 参考文献Ａ上巻２１２頁の注５、２１５頁、３７０頁。

[26] カネボウ事件では、事業評価上は、現預金については、全額を事業外資産として加算している（すなわち運転資金として一定額を控除した残額のみを事業外資産として加算するという立場を採らなかった)。本書２１１、２１５頁。

９　二分法[27]

将来の事業年度のうち、現在に近接したもの（例えば、今年度から向う７年間の事業年度）については、各事業年度のフリー・キャッシュ・フローが具体的に予測可能であるから、「６　各事業年度のフリー・キャッシュ・フローが異なる場合」で現在価値を求めるのが合理的である。このようなフリー・キャッシュ・フローが具体的に予測可能な期間についてまで、「７　各事業年度のフリー・キャッシュ・フローが一定割合で漸増する場合」のような仮設の前提を置いた計算による必要はない。

他方で、現在からかなり長期間が経過した後の事業年度（例えば、８年を超えた以降の事業年度）については、各事業年度のフリー・キャッシュ・フローを具体的に予測することは困難であるので、「７　各事業年度のフリー・キャッシュ・フローが一定割合で漸増する場合」のような仮設前提を置いた計算によるほかない。

このように、将来の事業年度を二つに区分して、別々に現在価値を計算したうえで、両者を加算するという方式で、事業価値を求めるのが一般的である。例えば、計画初年度から７年度までの事業年度を個別予測期間（詳細な業績予想期間、Explicit Forecasting Period）とし、[28]　計画８年度以降を仮設前提による計算をする期間[29]　に二分すると、[30]

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{7} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値} + \sum_{\mathrm{n}=8}^{\infty} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値}$$

である。ここで右辺の第１項は、

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{7} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値} = \frac{FCF_1}{1+R} + \frac{FCF_2}{(1+R)^2} + \frac{FCF_3}{(1+R)^3} + \cdots + \frac{FCF_7}{(1+R)^7}$$

を指している。この式は、分子が異なる数字であるので、これ以上は簡略化できない。具体的な数字を入力して、各年度の FCF の現在価値を算出したうえで、それを７年分合計する作業をおこなえばよい。

では、右辺の第２項（継続価値）は、どのように算出すべきか。この点、「８　永続価値（漸増する第１～第∞の各事業年度の FCF の現在価値合計）」を用いれば、計画８年度期首（計画７年度期末）を起点とした永続価値を求めることは可能である。そのような価値を、個別予測期間を超えた残りの期間にかかる価値という意味で、残存価値、終価、またはターミナル・バリュー（TV）と称するが、TV を上記方法に従い数式で示せば、具体的に

[27] 用いる数式の性質が前段（個別予測期間）と後段（継続的成長を仮設する期間）とで異なるため、便宜上このように命名したが、一般的呼称ではない。参考文献Ａ上巻１２章。

[28] 個別予測期間の長短は、合計としての事業価値評価には影響を及ぼさない。事業価値の内訳割合が違うだけである。参考文献Ａ上巻３０７～３１０頁。

[29] 継続価値を算定する前提として、継続価値算定期間では変動要素が変化しないというものがある。すなわち、継続価値の算定期間を設定するにあたっては、売上成長が低く安定した営業利益率を有する定常的な状態になった後の期間になるようにすべき。参考文献Ａ上巻３０３頁、３０９～３１０頁、３９４～３９５頁。

[30] 後段の継続価値の算定期間を更に二分し、異なる成長率等の前提を置いて算出する方式もあるが（参考文献Ａ上巻３２１頁）、本書では言及を省略した。

は、以下のとおりとなる。[31] [32]

$$TV = \frac{FCF_8}{R - g_n}$$

もっとも、この TV は、計画８年度期首（計画７年度期末）を評価起点とする価値であるから、同永続価値をそのまま計画１年度期首における現在価値の合算用に用いることはできない。同永続価値は、更に７年間遡らせて現在価値に割り引く必要がある。

ある事業の N 年度末の FCF を１年度期首における現在価値に換算する式は、「２　第 N 事業年度末にあるフリー・キャッシュ・フローの現在価値」によれば、以下のとおりであった。

$$現在価値 = \frac{FCF}{(1+R)^N}$$

今回は、TV について７年分の割引をしたいのであるから、

$$\sum_{n=8}^{\infty} FCF_n の現在価値 = \frac{TV}{(1+R)^7}$$

$$= \frac{\frac{FCF_8}{R - g_n}}{(1+R)^7}$$

$$= \frac{FCF_8}{(R - g_n)(1+R)^7}$$

となる。これで、右辺の第２項も表せたので、二分法による事業価値（現在価値）をまとめると、以下のとおりとなる。[33]

$$\sum_{n=1}^{\infty} FCF_n の現在価値 = \frac{FCF_1}{1+R} + \frac{FCF_2}{(1+R)^2} + \cdots + \frac{FCF_7}{(1+R)^7} + \frac{TV}{(1+R)^7}$$

$$= \frac{FCF_1}{1+R} + \frac{FCF_2}{(1+R)^2} + \cdots + \frac{FCF_7}{(1+R)^7} + \frac{FCF_8}{(R - g_n)(1+R)^7}$$

上式は、個別予測期間を計画７年度までとし、計画８年度以降を仮設前提による計算をする期間に二分した場合の式である。これを一般に、計画１年度期首における事業価値（現

[31] 参考文献Ｄ１１１頁の永久成長率法による継続価値の算定式。

[32] 継続価値の算定期間における FCF 成長率 g_n は、個別予測期間の FCF 成長率 g とは一致しない。継続価値の算定期間は安定期に入っているため、$g > g_n$ である。参考文献Ｄ１１４頁では、マクロ経済の長期的な成長率２％程度が上限であると指摘する。

[33] 参考文献Ｄ７４頁では、同公式をΣ表記した形で紹介している。

在価値の合計）をVとし、個別予測期間を計画n年度までとした一般式で表すと、以下のとおりとなる。[34]

$$V = \frac{FCF_1}{1+R} + \frac{FCF_2}{(1+R)^2} + \cdots + \frac{FCF_n}{(1+R)^n} + \frac{TV}{(1+R)^n}$$

本式についても、具体例で確認をする。[35]

個別予測期間である最初の５年間は、成長率gは９％とし、６年目以降の成長率g_nは６％へと低下するものとする。[36]　期待利回りRは１２％とする。

計画時からの年数	年	1	2	3	4	5	6		
みなし税引後営業利益	百万円	120	131	143	155	169	185	A	前期比９%増
純投資	百万円	76	83	91	99	108	117	B	前期比９%増
ＦＣＦ	百万円	44	48	52	57	62	67	C	=A-B
割引率	率	1.12	1.25	1.40	1.57	1.76		D	利回り12%換算
ＦＣＦの現在価値	百万円	39	38	37	36	35		E	=C/D

R	0.12	F	利回り12%
g_n	0.06	G	前期比６%増
$R-g_n$	0.06	H	=F-H
FCF_6	75	I	=第６期FCF(調整後)
TV(終価、残存価値)	1,247	J	=I/H
$(1+R)^5$	1.76	K	$=(1+0.12)^5$
継続価値	708	L	=J/K

39	１年目FCF現価
38	２年目FCF現価
37	３年目FCF現価
36	４年目FCF現価
35	５年目FCF現価
708	継続価値
892	合計価値

具体的に計算をしてみると、[37]

$$V = \frac{FCF_1}{1+R} + \frac{FCF_2}{(1+R)^2} + \frac{FCF_3}{(1+R)^3} + \frac{FCF_4}{(1+R)^4} + \frac{FCF_5}{(1+R)^5} + \frac{FCF_6}{(R-g_n)(1+R)^5}$$

$$= \frac{44}{1.12} + \frac{48}{(1.12)^2} + \frac{52}{(1.12)^3} + \frac{57}{(1.12)^4} + \frac{62}{(1.12)^5} + \frac{75}{(0.12-0.06)(1.12)^5}$$

[34] 参考文献Ｃ４７頁【図表１－Ⅳ－６　終価を用いたフリー・キャッシュ・フロー法の算定式】では、同式の形で紹介されている。

[35] 設例は参考文献Ａ上巻３０８頁（米ドルベース。バリュー・ドライバー式を使用）を参考に、日本円化、永続キャッシュ・フローの形にするなど若干の変更をした。

[36] 成長率が鈍化しきった時期以降（安定期）を、継続価値式で求めるので、g_nは低くなる。成長率の合理的な予想としては、各業界の長期成長率にインフレ率を加えたものとする見解として、参考文献Ａ上巻３０３頁がある。

[37] 右辺の最終項の分母の（１＋R）が５乗であるのは、TVは６年目以降の価値を６年目期首（５年目期末）の時間点で測ったものであり、その割引期間は６年ではなく５年であることによる。参考文献Ａ上巻３０８頁の指摘を参照。

$$= \frac{44}{1.12} + \frac{48}{1.25} + \frac{52}{1.40} + \frac{57}{1.57} + \frac{62}{1.76} + \frac{75}{0.06 \times 1.76}$$

$$= 39 + 38 + 37 + 36 + 35 + \frac{1247}{1.76}$$

$$= 185 + 708$$

$$= 892$$

となる。

なお、第６期 *FCF* の数値は、g_n＝６％での前期比増の数値（６７百万円）ではなく、７５百万円に調整したものを用いている。これは、売上（営業利益、純投資など全般）の成長率が９％から６％へと鈍化することを踏まえると、NOPLAT からの資金拠出は、売上高に対する運転資金の割合を一定に維持する程度の運転資金の増加分の拠出で足りるから、それを超える部分は拠出せず、*FCF* に残したことによる。[38]

この点、上記設例における第６期 *FCF* の数値の調整に手間がかかることから、上記継続価値部分については、*FCF* ではなく、それと等価の別公式をもって算出する方法もある（バリュー・ドライバ式)。[39]　これは、以下のような理解を前提とする。すなわち、「１　第１事業年度末にあるフリー・キャッシュ・フローの現在価値」を参考に、第ｔ期末の *FCFt* についての式を変形していくと（みなし税引後営業利益を *NOPLAT*、再投資等の比率を *IR* と表記する [40]）、

$$
\begin{aligned}
FCF_t &= NOPLAT_t + \text{非現金支出性営業費用} - \text{純投資} \\
&= NOPLAT_t + NOPLAT_t \times \text{減価償却費率} - NOPLAT_t \times \text{再投資比率} \\
&= NOPLAT_t\left(1 + \text{減価償却費率} - \text{再投資比率}\right) \\
&= NOPLAT_t(1 - IR)
\end{aligned}
$$

となる。[41] [42]

ここで、$NOPLAT$の成長率をg_nとする。g_nは、今期$NOPLAT_t$ に対して次期$NOPLAT_{t+1}$がどの程度増加したかの比率である。数式としては、以下のように定義される.

$$\frac{NOPLAT_{t+1} - NOPLAT_t}{NOPLAT_t} = g_n$$

---

38 参考文献Ａ上巻３１４～３１５頁「陥りやすい誤り」を参照。
39 参考文献Ａ上巻１７４～１７５頁、３０１～３０４頁。
40 Invested Rate の頭文字である。本書では、再投資比率から減価償却費率を控除したものを再投資等の比率 *IR* とした。参考文献Ａ上巻３０８頁参照。
41 式の括弧内１－*IR* は、当期のみなし税引後営業利益のうちフリー資金（株主や有利負債債権者に配分してよい金額）の比率を指している。逆に言えば、その残余の比率部分 IR は、事業の再投資等に充てられる比率を指している。
42 減価償却費率の予測に際しては、売上高に対する比率、有形固定資産に対する比率、固定資産の購入スケジュールからの積上予測といった手法がある。参考文献Ａ上巻２７９頁。

この式の両辺に、$NOPLAT_t$ をかけると以下のようになる。

$$NOPLAT_{t+1} - NOPLAT_t = NOPLAT_t \times g_{\mathrm{n}}$$

ここで、左辺の $NOPLAT$ 増加分は、以下のように書き換え可能である。すなわち、$NOPLAT_t$ のうち再投資等に回された金額（純投資等$_{\mathrm{t}} = NOPLAT_t \times IR$）は、新たに一定割合で次期の $NOPLAT$ 増加を生み出す。この割合を、新規投下資産収益率（$RONIC$）とする。[43]

$$RONIC = \frac{NOPLAT_{t+1} - NOPLAT_t}{\text{純投資等}_{\mathrm{t}}}$$

これは、追加投資等１円ごとに得られるリターン増加額を指す。この式の両辺に、純投資等t をかけると以下のようになる。

$$\text{純投資等}_{\mathrm{t}} \times RONIC = NOPLAT_{t+1} - NOPLAT_t$$

すなわち、純投資等に$RONIC$ を乗じた額が、$NOPLAT$ 増加分である。[44]

これらの式を踏まえると、上記式（$NOPLAT_{t+1} - NOPLAT_t = NOPLAT_t \times g_{\mathrm{n}}$）は、以下のように変形できる。

$$NOPLAT_{t+1} - NOPLAT_t = NOPLAT_t \times g_{\mathrm{n}}$$

$$\text{純投資等}_{\mathrm{t}} \times RONIC = NOPLAT_t \times g_n$$

$$NOPLAT_t \times IR \times RONIC = NOPLAT_t \times g_n$$

$$IR \times RONIC = g_n$$

$$IR = \frac{g_n}{RONIC}$$

これを、上記FCF_t に代入すると、

$$\begin{aligned} FCF_t &= NOPLAT_t(1 - IR) \\ &= NOPLAT_t \left(1 - \frac{g_n}{RONIC}\right) \end{aligned}$$

となる。

---

43 Return On New Invested Capital の略。

44 参考文献Ａ上巻３５～３７頁・１１３頁。参考文献Ｄ１１５～１１８頁。なお、これら書籍では、$RONIC=ROIC$ との前提で計算や表記をしている。

この FCF_t が一定比率g_n で増加するとした場合（すなわち *NOPLAT* 増加率g_nと同率で増加）、その永久未来までの合計値（第ｔ事業年度期首における評価額 TV）は、「８　永続価値（漸増する第１～第∞の各事業年度の *FCF* の現在価値合計）」を用いれば、以下のとおりとなる。（割引率 *R* に *WACC* を用いた表記例）[45]

$$TV = \frac{FCF_t}{R - g_n}$$
$$= \frac{FCF_t}{WACC - g_n}$$
$$= \frac{NOPLAT_t\left(1 - \frac{g_n}{RONIC}\right)}{WACC - g_n}$$

このバリュー・ドライバ式を使えば、仮設前提による計算をする期間の初年度末の *NOPLAT* 等が分かれば、FCF_t を求めることなく、*TV* を求めることができる。[46]

計画時からの年数	年	1	2	3	4	5	6		
NOPLAT	百万円	100	109	119	130	141	150		前期比９%増 ６期は６%増
減価償却	百万円	20	22	24	26	28			前期比９%増
みなし税引後営業利益	百万円	120	131	143	155	169		A	前期比９%増
純投資	百万円	76	83	91	99	108		B	前期比９%増
ＦＣＦ	百万円	44	48	52	57	62		C	=A-B
割引率	率	1.12	1.25	1.40	1.57	1.76		D	利回り12%換算
ＦＣＦの現在価値	百万円	39	38	37	36	35		E	=C/D

RONIC,　WACC	0.12	F	利回り12%
g_n	0.06	G	前期比６%増
RONIC-g_n,　WACC-g_n	0.06	H	=F-H
$NOPLAT_6$	150	I	=第６期NOPLAT
TV(終価、残存価値)	1,247	J	=I(1-G/F)/H
$(1+WACC)^5$	1.76	K	$=(1+F)^5$
継続価値	708	L	=J/K

39	１年目FCF現価
38	２年目FCF現価
37	３年目FCF現価
36	４年目FCF現価
35	５年目FCF現価
708	継続価値
892	合計価値

45 *WACC* の詳細は、「１１　*WACC*」で検討する。
46 参考文献Ａは、個別予測期間から継続価値算定期間に移行する際の *FCF* 予測調整上の誤りを防止する見地から、このバリュー・ドライバ式により *TV* を求めることを推奨している（同書上巻３７頁・１７４頁・３１４～３１５頁）

上記と同じ *FCF* の設例で、このバリュードライバ式を使ってみると、上の表のとおりとなる。計画６期目は、*FCF* を調整して求める作業が不要である。代わりに、*NOPLAT* の６期目の値が必要であるが、これは第５期の値に g_n（＝６％）を乗ずることで得られる。同数値は微調整する必要なく、そのまま割引式（バリュードライバ式）に代入できる。[47]

算定結果は、前述の永続キャッシュ・フロー方式と同じである。継続価値は７０８百万円で、事業の現在価値の合計は８９２百万で同じ結果が得られている。

上記式は、ある年度の*NOPLAT* を、投下資産と *ROIC*（投下資産収益率）[48] で求める形の予想式を用いることで、更なる変形が可能である。すなわち、*RONIC* と似た概念として、*ROIC*（前年度末までの投下資産総額に対する今年度のリターン）があるが、*ROIC* は、数式で表せば以下のとおりである。[49]

$$
\begin{aligned}
ROIC &= \frac{NOPLAT_{t+1}}{投下資産総額_{\mathrm{t}}} \\
&= \frac{(NOPLAT_{t+1} - NOPLAT_t) + (NOPLAT_t - NOPLAT_{t-1}) + \cdots + (NOPLAT_1 - 0)}{純投資_{\mathrm{t}} + 純投資_{\mathrm{t-1}} + \cdots + 純投資_0}
\end{aligned}
$$

同式によれば、*NOPLAT* は、以下のとおりとなる（投下資産総額 *Invested Capital* を *IC* と表記した）。[50]

$$
\begin{aligned}
ROIC &= \frac{NOPLAT_{t+1}}{IC_t} \\
NOPLAT_{t+1} &= IC_t \times ROIC \\
NOPLAT_t &= IC_{t-1} \times ROIC
\end{aligned}
$$

これを、上記の *TV* 算出式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
TV &= \frac{NOPLAT_t\left(1 - \frac{g_n}{RONIC}\right)}{WACC - g_n} \\
&= \frac{IC_{t-1} \times ROIC \times \left(1 - \frac{g_n}{RONIC}\right)}{WACC - g_n}
\end{aligned}
$$

となる。
同式について、

$$ROIC = RONIC$$

[47] 前述の永続キャッシュ・フロー方式では、第６期 *FCF* の数値は、割引前に数値調整が必要であったので、省力化できた。
[48] Return On Invested Capital の略。
[49] *RONIC* が差分どうし割算なのに対して、*ROIC* は総額どうしで割算をする。
[50] 最終行の左辺の下添え字が ***t+1*** 年度から *t* 年度に変更されたのに呼応して、右辺の下添え字も *t* 年度から ***t-1*** 年度に変更している。

との仮設前提を置く見解もある。[51]
この場合、上記の TV 算出式は簡略化され、以下のとおりになる。

$$
\begin{aligned}
TV &= \frac{IC_{t-1} \times ROIC \times \left(1 - \frac{g_n}{RONIC}\right)}{WACC - g_n} \\
&= \frac{IC_{t-1} \times ROIC \times \left(1 - \frac{g_n}{ROIC}\right)}{WACC - g_n} \\
&= \frac{IC_{t-1} \times ROIC \times \left(\frac{ROIC - g_n}{ROIC}\right)}{WACC - g_n} \\
&= \frac{IC_{t-1} \times (ROIC - g_n)}{WACC - g_n} \\
&= IC_{t-1} \times \left(\frac{ROIC - g_n}{WACC - g_n}\right)
\end{aligned}
$$

この式を利用すれば、継続期間前年度期末（継続期間開始年度期首）の投下資産総額IC_{t-1}が判明していれば、FCF に頼ることなく、後は、各種比率・成長率で将来の永続的 FCF の現在価値が算出できることになる。[52] [53]

---

[51] 参考文献Ａ上巻３７頁注１、４６０頁

[52] 但し、この等式は、$ROIC$ や $WACC$ が g_n（継続価値算定期間に入り既に鈍化している筈のキャッシュ・フロー成長率）よりも大きいことが前提である。参考文献Ａ上巻４６０頁の注１

[53] 因みに、参考文献Ａ上巻４６１頁では、この等式を、残存価値 TV から事業価値Ｖの一般論に敷衍したうえ、資産簿価 IC_0 に将来の経済利益（*Economic Profit*）の現在価値（*PV*）を足したものが事業価値 V であることを、以下のとおり、導いている（継続期間の CF 成長率 g_n を通常期間の CF 成長率 g とし、継続期間前年度期末の投下資産総額 IC_{t-1} を簿価すなわち初年度度投資額 IC_0 と表記替え）。

$$
\begin{aligned}
V &= IC_0 \times \left(\frac{ROIC - g}{WACC - g}\right) \\
&= IC_0 \times \left(\frac{ROIC - WACC + WACC - g}{WACC - g}\right) \\
&= IC_0 \times \left(\frac{ROIC - WACC}{WACC - g} + \frac{WACC - g}{WACC - g}\right) \\
&= IC_0 \times \left(\frac{ROIC - WACC}{WACC - g} + 1\right) \\
&= IC_0 \times \left(\frac{ROIC - WACC}{WACC - g}\right) + IC_0 \\
&= \frac{IC_0(ROIC - WACC)}{WACC - g} + IC_0 \\
&= \frac{Economic\ Profit}{WACC - g} + IC_0 \\
&= PV_{Economic\ Profit} + IC_0
\end{aligned}
$$

なお、継続価値の算定期間における *RONIC* が資本コスト *WACC* と等しいと仮定する前提を置く見解もある（収れん法）。この場合、上記式は、以下のような形に整理される。

$$
\begin{aligned}
TV &= \frac{NOPLAT_t\left(1-\frac{g_n}{RONIC}\right)}{WACC-g_n} \\
&= \frac{NOPLAT_t\left(1-\frac{g_n}{WACC}\right)}{WACC-g_n} \\
&= \frac{NOPLAT_t\left(\frac{WACC-g_n}{WACC}\right)}{WACC-g_n} \\
&= \frac{NOPLAT_t}{WACC}
\end{aligned}
$$

この式によれば、結論として、成長率g_n を考慮する必要がなくなる。[54]　これは、*NOPLAT* の成長率がゼロという趣旨ではなく、単に、成長によりもたらされる収益が、資本コストに等しいため、成長が事業価値の評価に影響を及ぼさないということを意味しているだけである。いずれにせよ、*RONIC* が *WACC* に等しいという仮定が妥当しない対象企業には、用いられない。[55]

TV を算出した後の処理は、３０頁で述べたものと同様である。*TV* を個別予測期間の期首まで現在価値に割り引いたうえで、個別予測期間の各 *FCF* の現在価値と合計して、全期間の *FCF* の現在価値合計額を求める。

54 参考文献Ｄ１１９頁。
55 参考文献Ａ上巻３１５～３１９頁

１０　R（期待利回り）

R（期待利回り）を、どのようにして定めるか。利回り次第で、事業価値（ひいては企業価値や株主価値）が大きく変わるので、合理的な算定方法が必要である。

・０．０１～０．１％（銀行定期預金）
・０．０６％（日本国債１０年）
・０．１％（ＬＩＢＯＲ１２か月）
・２％（米国債１０年）
・１～３．５％（銀行貸出し金利）
・２．７５～５％（東証一部上場企業の配当利回り）
・５％（民法４０４条の法定利率）
・６％（商法５１４条の商事法定利率）
・５～１０％（不動産投資）
・５～３０％（ギリシャ国債１０年）
・　～３０％（投資信託年間分配金利回り）

例えば、同じ事業（FCF が毎期１０００万円で一定の事業）を買い受けようとする投資者が複数いる場合、各投資者による評価額（買受可能な最大金額）は異なる。すなわち、「５永続価値（第１～第∞の各事業年度のフリー・キャッシュ・フローの合計）」で導出した、

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{FCF}{(1+R)^{n}} = FCF \times \frac{1-0}{R}$$

$$= \frac{FCF}{R}$$

の式を用いて計算すれば、以下のとおりとなる。

・投資者Ａ（借入金利２％で資金調達して事業を購入予定）

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} FCF_{\mathrm{n}}\text{の現在価値} = \frac{1000}{0.02}$$

$$= 5\text{億円}$$

までは出せる（例：３億円で事業譲受をして毎期１０００万円を得ながら、借入金３億円について初年度利息６００万円及び元金返済４００万円をおこなう。次第に利息支払額は減少し残元金も減少し完済できる）

・投資者Ｂ（借入金利１０％で資金調達して事業を購入予定）

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} FCF_{\mathrm{n}} の現在価値 = \frac{1000}{0.10}$$

$$= 1 億円$$

までしか出せない（例：３億円で事業譲受をしてしまうと、毎期１０００万円しか得られない状況下で、借入金３億円の利息支払いだけで毎期３０００万円必要となり、元金返済も進まないため、他に収入源がなければ支払不能に陥る）

・投資者Ｃ（株主に毎期時価の５％配当をすることを標榜している株式会社。借入金なし。他事業は売却済みで投資先がないため、本事業を現金で譲り受ける予定）

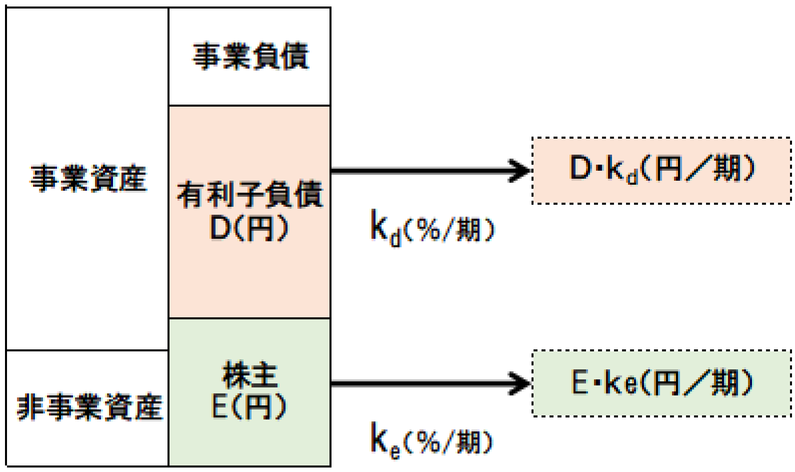
$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} FCF_{\mathrm{n}} の現在価値 = \frac{1000}{0.05}$$

$$= 2 億円$$

までしか出せない（例：３億円で事業譲受をすると、毎期１０００万円しか収入がないため、時価３億円の５％にみあう１５００万円の配当は実施できない。株式の価値は下落するし、取締役も再任されない［との株主圧力も予想される］)。

１１　*WACC* [56]

株式会社が事業を営む主体である場合、同社に対する投資家として、株主および有利子負債の債権者が存在する（短期の支払期限が来ればその都度支払いがなされる事業負債にかかる債権者は、約定金額を受け取れば弁済は満足される立場にあるので、投資を通じて利息により利益を受ける投資家には含まない。これらは売上原価等の営業経費に含まれており、事業評価上は、事業からのキャッシュ・フローに組み込まれて評価されている[57]　)。



有利子負債の債権者に対しては、法律上の利息支払義務がある。負債額を D（円）とし、利率を負債額の k_d（%／期）とすると、毎期の支払額は、$D \cdot k_d$（円／期）となる。[58]

株主に対しては、法律上の配当義務はないが、諸般の事情により、一定割合で配当をせよという圧力がある。資本額を E（円）とし、配当期待利率を資本額の k_e（%／期）とすると、毎期の配当額は、$E \cdot k_e$（円／期）となる。

いずれも、株式会社としては、投資家に毎期支払うべきコストと評価することが可能であるので、以下のとおり、コストと呼称されている。[59]

・k_d　…有利子負債コスト
・k_e　…株主資本コスト

---

[56] *WACC* は、Weighted Average Cost Of Capital（加重平均資本コスト）の略である。資本というと法律上は株主のみを指すかのようであるが、これは経済会計用語であり、投資家（株主や貸金債権者）の出した資金のことを指している。

[57] 事業用流動負債の例としては、買掛金、未払賃金、顧客からの前受金、未払法人税がある。参考文献Ａ上巻２１１頁、３２６頁。

[58] k_dの d は、下添え字である。同じ k という記号を利率の趣旨で、負債 D と株式 E の両者に併用する関係上、k_dなる新たな記号を用いた。k_dで一つの数値を示す。$k\times d$という乗算を示すものではない。k_eも同様に一つの数値を示す。

[59] 同じ利率でも会社経営者からみればコストであり、投資家からみればリターン（利回り）である。

もっとも、このうち、有利子負債コストについては、調整が必要である。支払利息は損金に算入され、法人税の対象となる利益から除外される。このため支払利息k_dに法人税率Tを乗じた分だけ法人税支払が減少する効果がある（節税効果）。これは支出の減少であるから、コストの減少として把握すべきである。よって、有利子負債のコスト（％／期）は、コストの減少として、$-Tk_d$　を反映させるべく、

$$
\begin{aligned}
&k_d - Tk_d \\
&= k_d(1 - T)
\end{aligned}
$$

となる。[60]

あとは、この有利子負債コストと株主資本コストを組み合わせれば、会社全体の投資家（有利負債債権者、株主）に対する投資コストが算定できる。この点、どのような組み合わせが相当であるかであるが、いずれも金銭支払という点で同じなのであるから、破綻企業のような特殊性（債権者が優先する）がない限りは、重みを拠出額に応じて割り付けるのが公平である。[61]　よって、両者の加重平均をとることとし、以下のとおり、投資家へのコストを定める。[62]

$$
\begin{aligned}
R &= WACC \\
&= \frac{D}{D+E} k_d(1-T) + \frac{E}{D+E} k_e \\
&= \frac{D}{V} k_d(1-T) + \frac{E}{V} k_e
\end{aligned}
$$

・D　…　有利子負債
・E　…　株主価値
・$V = D + E$
・k_d　…　有利子負債コスト
・k_e　…　株主資本コスト
・T　…　限界税率

なお、以上の直感的な手法による *WACC* の定式化では、有利子負債 D や株主価値 E について、額面金額にて計算をすべきなのか、時価で計算をすべきなのかが不分明である。そこで、以下、事業価値を代数的に変換していき、上記 *WACC* を含む式を導出する過程で、

---

60 参考文献Ａ上巻３５８頁

61 資本構成は将来にわたり変化しうるので、*FCF* が生まれる将来時点で想定される資本負債比率による。類似企業の資本構成と比較して評価対象企業の現在の資本構成が適切か、借入に対する経営方針も検討して、目標とする資本構成比率を割り出す。参考文献Ａ上巻３６０～３６４頁。

62 参考文献Ａ上巻１７５～１７７頁。参考文献Ｄ２３５頁。なお、参考文献Ａ上巻３５９頁の式は、$\frac{E}{V}k_e$ の前に＋記号が欠落しているが、誤植と思われる（英文原書版は＋記号あり）。

有利子負債 D や株主価値 E が時価で把握されるべきことを示す。[63]

事業価値 V は、有利負債の市場価値 D と株主資本の市場価値 E の和である総投資額に等しいと考えるから、[64]　以下の式が成立する。[65]

$$V = D + E$$

両辺に、　$1 = \frac{D(1-T)k_d + CF_e - Dg}{D(1-T)k_d + CF_e - Dg}$　を乗ずると、[66]上式は以下のとおりになる。

$$V = (D+E)\left(\frac{D(1-T)k_d + CF_e - Dg}{D(1-T)k_d + CF_e - Dg}\right)$$

ここで、　・CFe … 株主に帰属するキャッシュ・フロー

・g　…　CFe の成長率

である。

右括弧内の分子は、以下のとおり変形できる。

$$D(1-T)k_d + CF_e - Dg$$
$$= Dk_d(1-T) + CF_e - Dg$$
$$= 利息(1-T) + CF_e - Dg$$

ここで、CFe は、株主に帰属するキャッシュ・フローなのであるから、

$CF_e =$ 営業利益－利息－税金－純投資＋有利子負債の増加分

と言える。[67]　そして、仮に、「D／Eの比率は常に一定」との前提をおけば、[68]　有利子負債 D の増加率は、Ｅの増加率（CFe の成長率 g）と同じであるべきである。よって、有利子負債 D の増加分は、Dg となるから、上記式は、

$CF_e =$ 営業利益－利息－税金－純投資＋Dg

となる。これを、

$$D(1-T)k_d + CF_e - Dg$$

---

[63] この式変形については、参考文献Ａの上巻の４６５～４６８頁にも詳しい。

[64] 逆に言えば、有利子負債及び株主資本の和に対応しない企業価値部分は、非事業用資産としてカウントする。

[65] 投資総額Ｖの定義。投資総額が事業価値に等しいとの前提（額面額ではなく実価値）。企業価値と事業価値の違いについては、本書７頁の図版参照。

[66] 分母・分子が同じであるので、これを乗じても、等式は当然に維持される。

[67] ここでいう営業利益は、既に、減価償却費は足し戻されているとの前提。

[68] レバレッジが一定（事業成長とともに有利子負債も増える）ということである。

$$= 利息(1-T)+CF_e-Dg$$

に代入すると、

$$\begin{aligned}
&= 利息(1-T)+\left(営業利益－利息－税金－純投資＋Dg\right)-Dg \\
&= 利息(1-T)+営業利益－利息－税金－純投資 \\
&= 利息-利息・T+営業利益－利息－税金－純投資 \\
&= -利息・T+営業利益－税金－純投資 \\
&= 営業利益-利息・T－税金－純投資 \\
&= 営業利益-(利息・T+税金)－純投資 \\
&= 営業利益-みなし税－純投資 \\
&= 事業からのフリー・キャッシュ・フロー
\end{aligned}$$

と整理される。[69] [70]

他方で、$V=(D+E)\left(\frac{D(1-T)k_d+CF_e-Dg}{D(1-T)k_d+CF_e-Dg}\right)$ の右辺の右括弧内の分母は、以下のとおり変形できる（２６頁同様の理屈から、$E=\frac{CFe}{ke-g}$ となることを用いた)。

$$\begin{aligned}
&D(1-T)k_d+CF_e-Dg \\
&= D(1-T)k_d+\frac{CF_e}{k_e-g}(k_e-g)-Dg \\
&= D(1-T)k_d+E(k_e-g)-Dg \\
&= D(1-T)k_d+Ek_e-Eg-Dg \\
&= D(1-T)k_d+Ek_e-(D+E)g
\end{aligned}$$

分子と分母に上記の各式を代入して、

$$\begin{aligned}
V &= (D+E)\left(\frac{D(1-T)k_d+CF_e-Dg}{D(1-T)k_d+CF_e-Dg}\right) \\
&= (D+E)\left(\frac{事業からのフリー・キャッシュ・フロー}{D(1-T)k_d+Ek_e-(D+E)g}\right)
\end{aligned}$$

[69] みなし税とは、企業が株式のみで資金調達した場合に支払う必要のある税金である。すなわち、

みなし税－支払利息による節税効果分＝実際の法人税額

の関係がある。

[70] 事業からのフリー・キャッシュ・フロー＝営業利益－みなし税－純投資　（定義）

$$= \frac{\text{事業からのフリー・キャッシュ・フロー}}{\frac{D}{D+E}(1-T)k_d + \frac{E}{D+E}k_e - \frac{D+E}{D+E}g}$$

$$= \frac{\text{事業からのフリー・キャッシュ・フロー}}{\frac{D}{D+E}(1-T)k_d + \frac{E}{D+E}k_e - g}$$

$$= \frac{\text{事業からのフリー・キャッシュ・フロー}}{WACC - g}$$

これは、企業価値 V が、事業からのフリー・キャッシュ・フローを、$WACC - g$ で除することで算出できることを示している。また、$WACC$ の内容が、有利負債の市場価値Ｄと株主資本の市場価値Ｅを要素とする以下の式で現れること、すなわち、$WACC$ の要素たる D や E は簿価や額面額ではなく、時価であることを示している。

以上のとおり、$WACC$ は、株主資本コストと税引き後有利子負債コストについて、有利子負債と資本の比率で加重平均することで求められる。

$$WACC = \frac{D}{D+E}k_d(1-T) + \frac{E}{D+E}k_e$$

この D, E からなる加重平均比率は、事業を継続していくうえで典型的なものであることが必要であり、必ずしも現時点での資本構成比率とは限らない（２７「負債 D／株主資本 E」参照）。資本構成の変化の幅が大きい場合、$WACC$ による DCF 法は価値算定に誤差を生ずる。転換社債[71]・優先株式・ストックオプション[72] その他のハイブリッド証券の扱いにより評価結果に大きな違いが生ずることもある。[73]　これらの場合は、APV 法が適切とされる。[74]

$WACC$ は、FCF を割り引く際の基準となる利回りであるため、複数の個所で登場する。例えば、第１期 FCF を 1+$WACC$ で割ることで現在価値は求められるし、第２期 FCF を 1+$WACC$ の二乗で割ることで現在価値が求められる。同様に個別予測期間の最終期を第７期とすれば、第７期 FCF も、1+$WACC$ の７乗で割って現在価値が求められる。

$WACC$ の使用場所はそれだけではない。個別予測期間を過ぎた第８期以降から無限未来までの FCF を第８期首まで割り引いて残存価値 TV を求める際にも用いられるし、そのように求めた TV を第１期首まで割り引く際にも用いる。

---

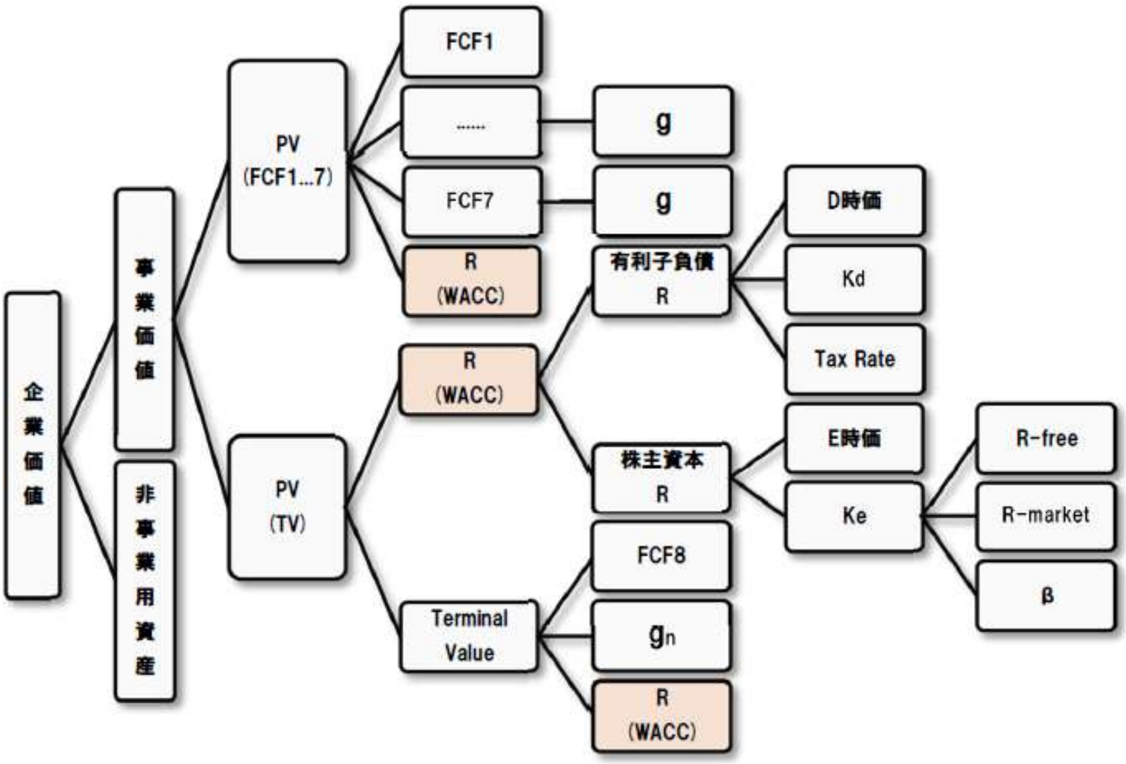
71 普通社債と転換オプションの組み合わせとして価値を算定。市場価値法・Black–Scholes モデル・転換価値法がある。参考文献Ａ３８２～３８５頁。

72 評価手法として、Black–Scholes モデル・２項モデル、行使価値法がある。参考文献Ａ上巻３８６～３８８頁。

73 参考文献Ｄ２８７頁

74 参考文献Ａ上巻３６０頁、３６４、３６９頁。

以下は、*WACC* が計算過程で用いられる場面を、要素ごとに図解したものである。



WACC を用いた手法は、有利子負債／企業価値比率が安定している企業を評価するのに適している。この比率に変化が予想される企業の場合、前提が異なる以上、正しい評価額とはならない恐れがある。このため、資本構成が変わることが予定されている事業や企業の評価には、*WACC* を用いる DCF 法ではなく、APV 法 [75] を用いることが推奨されている。APV 法は、有利子負債がないと仮定して算出した株主資本コスト（後述の Unlevered 株主資本コスト）を割引率として用いる（その後、有利子負債の利息支払による節税効果分を別途に算定して加算する）手法である。[76]

[75] Adjusted Present Value の頭文字。参考文献Ａ上巻の１６２頁、１８５～１９１頁、３６５頁

[76] 参考文献Ｄ１６１～１６４頁。

１２　株主資本コスト k_e

$WACC$ の構成要素である株主資本コスト k_e とは、企業が株式を発行して調達する資金にかかる金銭面でのコストであり、具体的には、株主資本の市場時価の単位（円）あたりについて支払うべき毎期あたりの配当金額その他見返り（株価の上昇を含む）である。単位は、［円／円・期］＝「／期」である。株主側からすれば、期待利回りと同義である。企業側からすれば、その期待利回りに応える必要がある（法的義務はないが、応えないと種々の不都合が起きる）という意味からコストと考えられるので、株主資本コストと呼ばれる。

株主資本コストは以上のような曖昧模糊としたものであるため、的確に推算するのは難しい。[77] [78]しかし、良くわからないからといって、これを全くのゼロとみなして $WACC$ の計算をするのも相当でない。投資家としては、株主として投資に関与する代わりに、以下の安全な投資をして最低限度の利殖を得ることも可能だからである。[79]

・０．０７％（日本国債１０年）
・２％（米国債１０年）

したがって、株主資本コストk_e は以下のように、変動リスクが無いと考えられる投資の利回り（Risk Free Rate）に、プラス・アルファ（変動リスクをとる見返りとしての Premium）を加えたものである。

$$k_e = r_f + Risk\ Premium$$

・R_f …リスク・フリー・レート [80]
・$Risk\ Premium$ …その株式固有の見返り

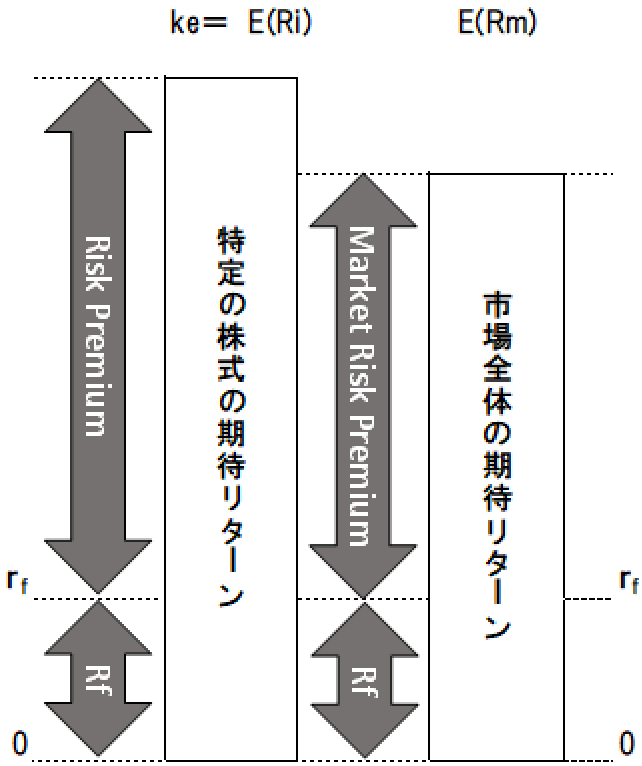
他方で、投資家としては、株主として株式に投資しているのであるから、株式市場の利回りくらいは当然に期待している筈である。すなわち、変動リスクが無いと考えられる投資の利回りに、別の大きさのプラス・アルファ（株式市場の通常の Market Risk をとる見返りとしての Premium）を加えた程度は、期待(Expectancy)を持たれているはずである。これを式にすると、株式市場の期待利回り$E(r_m)$ は、以下のとおりとなる。

$$E(r_m) = r_f + Market\ Risk\ Premium$$

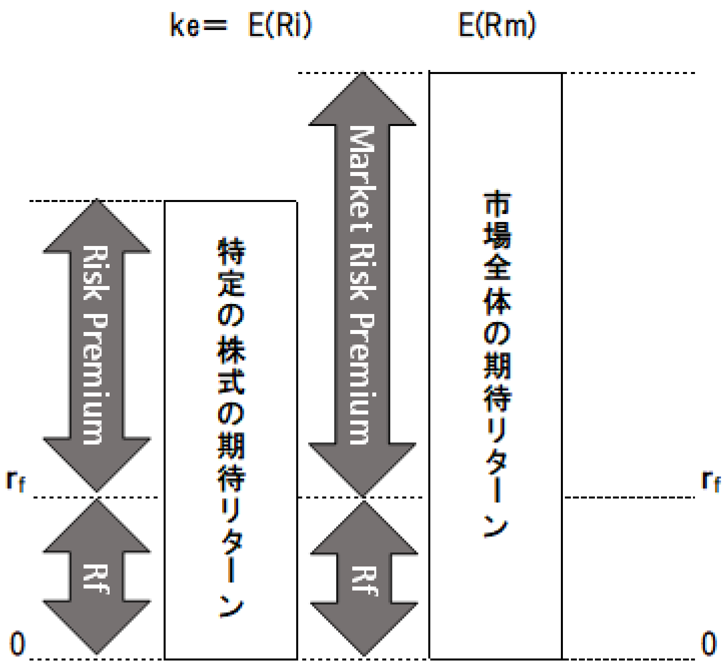
---

77 株主資本コストを直接測定する方法は存在せず、提唱される推定モデルを用いるほかない。参考文献Ａ上巻３２５頁、３２９頁。
78 各国の株主資本コストを試算したものとして、PLUTUS＋ MEMBER’S REPORT No.72「設例で見る各国の株主資本コスト」(April 8,2016)
79 国は、約定通りの支払いをおこない、破産もしないとの前提。
80 日本であれば日本国債の利回り。ちなみに、カネボウ事件では、長期国債利子率を使用し、平成１８年４月３１日時点の新規発行の長期国債の利回りである年利１．８７５％を用いている。本書２１２頁。

両者を、比較のため、図にしてみると、以下のようになる。



逆に、市場全体の期待リターンよりも低い企業もあるかも知れない。



このように、対象企業の株式の利回りは、市場の全企業の平均値的な利回りとは当然には一致しない。すなわち、株主資本コストk_e は、株式市場の期待利回りだけでは計算できない。

もっとも、対象企業の株式も、市場の全企業の株式とは完全に無関係ではないだろうから、何らかの関係があると推察される。普通に考えて、景気が良ければ平均的に株価は上昇し、対象企業の株価も程度の差こそあれやはり上昇すると考えられるからである（逆に下降するときも同様)。ここで、r_f 部分は両者に共通なので、以下では、

$$E(r_m) - r_f$$

すなわち$Market\ Risk\ Premium$　の具体的計算方法を検討した後に、それと $Risk\ Premium$ との関係を検討していくことにする。[81]

[81] 後述する CAPM モデルでは、両者に比例関係があるとする。

１３　マーケット・リスク・プレミアム

前項で、株主資本コストを求める際に、以下の式で表されるマーケット・リスク・プレミアム（$Market\ Risk\ Premium$）が必要となりそうであることが分かった。[82]

$$r_m - r_f$$

しかし、この値は、どのようにして求めるのだろうか。

過去の株式市場データ（TOPIX）から、その時々の r_m は大量に取得できる。また、過去の国債発行データからも対応する各時点における r_f は入手可能である。一定の期間について多数の企業の株主に対する総リターン（Total Return to Shareholders）から国債のリターン（利回り）を引くわけであるが、しかし、これら利率は、年月の経過とともに刻々と変化するものであり、したがって、その差であるマーケット・リスク・プレミアムも拡大したり縮小する。よって、どのように過去のレートを処理して、現在の評価対象企業の株主資本コストを求める際のレートとして用いるかが問題となる。[83]

例えば、過去３年分の市場リターン（r_m　例として６％、７％、６％）とリスク・フリー・レート（r_f　例として２％、４％、３％）のデータが得られたとして、これを基にリスク・プレミアム $r_m - r_f$ の平均値をどうやって算出すべきか。

（パーセントをそのまま平均する方法）

$r_m - r_f$ の値が３つあるのだから、全部足して３で割るという発想である。いわゆる平均である。[84]　この場合、以下の Excel 表のとおり、約３．３３％という値が出る。

	r_m	r_f	$r_m - r_f$	$r_m - r_f$ の平均
20*1年	6%	2%	4%	3.333%
20*2年	7%	4%	3%	
20*3年	6%	3%	3%	

数式で示せば、以下のとおりである。[85]

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(r_{m(t)} - r_{f(t)}\right)$$

82　$E(r_m)$ 表記は、期待値 Expectancy の趣旨。以降、単に r_m とすることがある。

83 参考文献Ａ上巻４９１頁

84 Excel では、AVERAGE 関数で計算可能である。

85 *rm* や *rf* の括弧添え字 *t* は、１年目～*T* 年目を示す。例えば、*rm(2)* は、２年目の市場期待利回り、*rf(3)* は、３年目のリスク・フリー・レートを指す。

$$=\frac{1}{3}\sum_{t=1}^{3}\left(r_{m(t)}-r_{f(t)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\{(6\%-2\%)+(7\%-4\%)+(6\%-3\%)\}$$

$$=\frac{1}{3}\times(4\%+3\%+3\%)$$

$$=\frac{1}{3}\times 10\%$$

$$=3.333\ldots\%$$

（いわゆる算術平均法）

上記の平均法では、パーセントをそのまま平均した。そこで言う基準値（０％）は、利回り０％ということである。ところで、これまで検討してきたように、プレミアム・リスク・レートは、基準値を国債利回り rf として、そこからの乖離幅として把握をしている。その観点からすると、基準値を分母に、乖離幅を分子に置いて、乖離度合いを把握することが考えられる。そして、例えば、rf が１％ということは、比率では１．０１を指すことを踏まえれば（数式で書けば、$1+r_f$）、上記の平均を求める式は、

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+r_{m(t)}-\left(1+r_{f(t)}\right)}{1+r_{f(t)}}\right)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}-\frac{1+r_{f(t)}}{1+r_{f(t)}}\right)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}\right)-\frac{T}{T}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}\right)-1$$

という形になる。[86]

この式で、上記設例を前提に、算術平均を実際に計算してみると、

[86] 参考文献Ａ上巻４９２頁に掲載の算術平均（Arithmetic Average）の公式。

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}\right)-1$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1+0.06}{1+0.02}\right)+\left(\frac{1+0.07}{1+0.04}\right)+\left(\frac{1+0.06}{1+0.03}\right)\right\}-1$$

$$=\frac{1}{3}\times(1.0392+1.0288+1.0291)-1$$

$$=\frac{1}{3}\times 3.0972-1$$

$$=1.0323960-1$$

$$=0.0323960$$

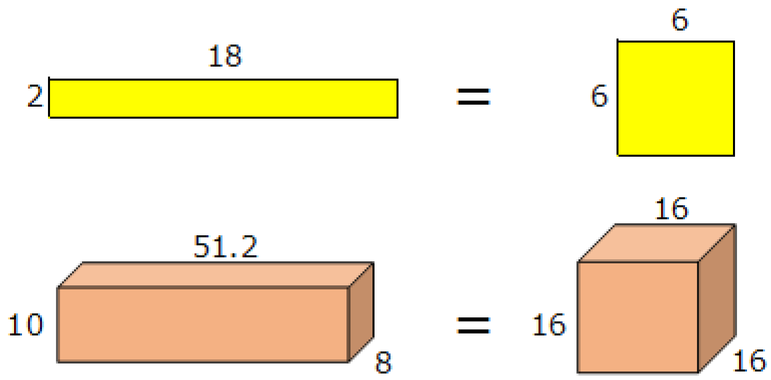
$$=3.2396\%$$

となり、３．３３％より若干低い数値が得られた。

	r_m	r_f	$1+r_m$	$1+r_f$	$\frac{1+r_m}{1+r_f}$	$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}\right)-1$
20*1年	6%	2%	106%	102%	103.92%	3.2396%
20*2年	7%	4%	107%	104%	102.88%	
20*3年	6%	3%	106%	103%	102.91%	

（幾何平均法）

その他の見解として、幾何平均（相乗平均）がある。この方式は、平均の考え方自体が異なる。幾何平均は、このように考える。例えば、以下の図版にあるとおり、幅２×長さ１８＝面積３６　の長方形がある。この長方形の面積を変えずに、各辺を同じ長さに揃えると（幾何学的な平均化）、一辺が６×６＝面積３６の正方形になる。



同様に、各辺が１０×５１．２×８＝体積４０９６の直方体がある。この直方体の体積を変えずに、各辺を同じ長さに揃えると（幾何学的な平均化)、一辺が１６×１６×１６＝体積４０９６の立方体になる。このように、平均を採りたい各数を掛け算で全部掛け合わせて、それを個数で√して、（幾何学的に）求める平均値が、幾何平均である。この方式の場合、掛ける個数が４以上になると、（３次元及び時間軸という物理世界で生活する人類にとっては）幾何学的なイメージが掴み難くなるが、数式上は、以下のように正方形や立方体から敷衍した抽象的ルールを作り出すことで、個数４以上の幾何平均も実行可能である。すなわち、正方形の例では、

$$2 \times 18 = 6 \times 6$$
$$\sqrt[2]{2 \times 18} = 6$$

となるし、立方体の例では、

$$10 \times 51.2 \times 8 = 16 \times 16 \times 16$$
$$\sqrt[3]{10 \times 51.2 \times 8} = 16$$

となるところ、いずれの場合でも、上側の式（正方形であれば、$2 \times 18 = 6 \times 6$ ）では、等式の左側の各数値が、等式の右側では同一数に変換されているし、下側の式（正方形であれば、$\sqrt[2]{2 \times 18} = 6$ ）からは、等式の左側の各数値を掛け合わせて、個数で√することで平均値が得られることがわかる。同じことは、左側の数字の個数が４個以上になっても成立する。例えば、a, b, c, d, eという５つの数字の幾何平均値fを求めるには、a, b, c, d, eを全部かけて、個数５で√を採れば、求めることができる。

$$a \times b \times c \times d \times e = f \times f \times f \times f \times f$$
$$a \times b \times c \times d \times e = f^5$$
$$\sqrt[5]{a \times b \times c \times d \times e} = \sqrt[5]{f^5}$$
$$\sqrt[5]{a \times b \times c \times d \times e} = f$$

これを、一般式で表現すると、以下のようになる。[87]

$$\left(\prod_{i=1}^{N} a_i\right)^{\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots\ldots \times a_N}$$

- N … データ個数
- a … 平均を採る前の個別データ値

要するに、足して個数で割るのが算術平均であり、掛けて個数で√するのが幾何平均で

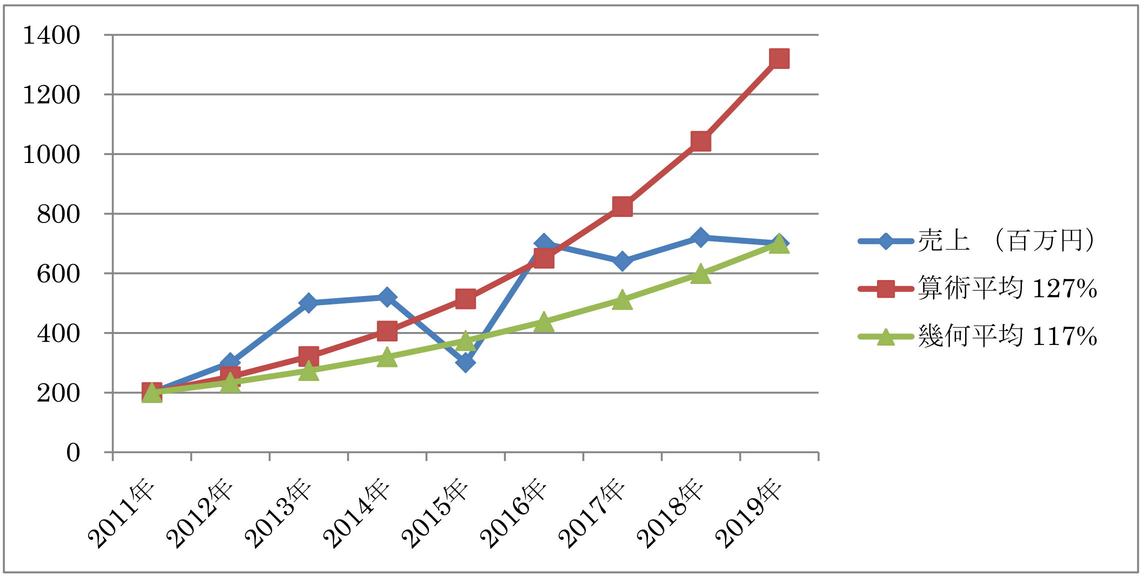
[87] 記号Πは、パイ（Pi)と呼称する。要素を全部掛け合わせるという意味に用いられる。

ある。幾何平均は、ビジネス社会では、例えば、毎年、売上高が成長していくような場合に、その売上高成長率（は実際は毎年まちまちであるが）を、全期間に平均して、ならして把握をしたいときに用いられる。[88]

例えば、以下のような売上推移のある企業を考えてみる。売上は毎年変動するので、対前年比（伸び率）は、良好なときもあれば前年を割り込んでいるときもある。これを平均化してならしてみるときに、算術平均は１２７％、幾何平均は１１７％となる。

	売上（百万円）	対前年比	算術平均 127%	幾何平均 117%
2011年	200		200	200
2012年	300	150%	253	234
2013年	500	167%	321	274
2014年	520	104%	406	320
2015年	300	58%	514	374
2016年	700	233%	651	438
2017年	640	91%	824	512
2018年	720	113%	1043	599
2019年	700	97%	1320	700

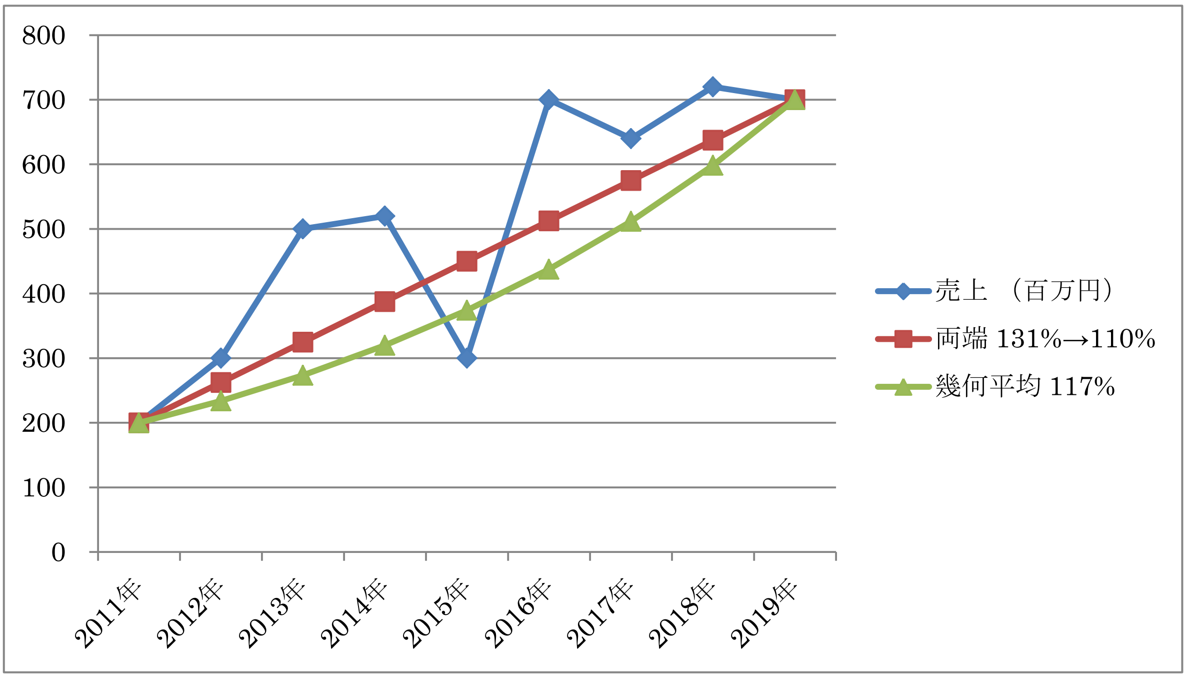
この平均値を前提に、各年の前年売上に対前年比（平均）を乗じてみると、上記 Excel 及び以下のグラフのように、算術平均ではずれが拡大する一方なのに対して、幾何平均では少なくとも最後の年は数値が一致する（そのように逆算して比率を出すのが幾何平均）。



88 Excel では、GEOMEAN 関数で計算可能である。

そのようなわけで、算術平均は、古い年度の売上高から機械的に未来を計算予測させるには適当ではない。

もっとも、幾何平均で、最初と最後の年の数値が一致するのは、そのように逆算して、各年の平均成長率を求める方式だからであり、別段、幾何平均の未来予測力が高いからではない。最後の年の数値を使ってよいのなら、以下のグラフのように、両端を接続して直線にする方が、まだ実態にはあっているだろう（もっとも、この場合、平均的な成長率という概念は使っていないことになる）。



本書では、過去のマーケット・リスク・プレミアム（$r_m - r_f$）をもとに、現時点以降の $r_m - r_f$ を得ようとしているのであるから、いずれの手法でも誤差は避けられないところであるが、幾何平均も選択肢のひとつであるから、以下では、過去の $r_m - r_f$ の幾何平均を採る場合の数式を確認しておく。幾何平均の一般式は、以下のとおりであった。

$$\left(\prod_{i=1}^{N} a_i\right)^{\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \ldots \times a_N}$$

この各 a に、$1 + r_f$ を分母とし、乖離幅 $(1 + r_m) - (1 + r_f)$ を分子とする分数、すなわち以下の数式を、

$$\frac{1 + r_{m(t)} - \left(1 + r_{f(t)}\right)}{1 + r_{f(t)}}$$

$$= \frac{1 + r_{m(t)}}{1 + r_{f(t)}} - 1$$

各年分について T 年間分代入していけばよいので、幾何平均式は、

$$\left(\prod_{t=1}^{T}\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}-1\right)^{\frac{1}{T}}=\sqrt[T]{\left(\frac{1+r_{m(1)}}{1+r_{f(1)}}-1\right)\times\left(\frac{1+r_{m(2)}}{1+r_{f(2)}}-1\right)\times\ldots\ldots\times\left(\frac{1+r_{m(T)}}{1+r_{f(T)}}-1\right)}$$

となる。この式を前提に、過去３年分の市場リターン（rm　６％、７％、６％）とリスク・フリー・レート（rf　２％、４％、３％）のデータを基に$r_m - r_f$ の平均値を算出すると、以下のとおりとなる。

$$\left(\prod_{t=1}^{3}\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}-1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left\{\left(\frac{1+0.06}{1+0.02}-1\right)\times\left(\frac{1+0.07}{1+0.04}-1\right)\times\left(\frac{1+0.06}{1+0.03}-1\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$=(0.0392\times 0.0288\times 0.0291)^{\frac{1}{3}}$$

$$=0.0000329^{\frac{1}{3}}$$

$$=\sqrt[3]{0.0000329}$$
$$=0.0320586$$
$$=3.2059\%$$

	r_m	r_f	$1+r_m$	$1+r_f$	$\frac{1+r_m}{1+r_f}$	$\frac{1+r_m}{1+r_f}-1$	$\left(\prod_{t=1}^{T}\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}-1\right)^{\frac{1}{T}}$
20*1年	6%	2%	106%	102%	103.92%	3.92%	
20*2年	7%	4%	107%	104%	102.88%	2.88%	3.20586%
20*3年	6%	3%	106%	103%	102.91%	2.91%	

この値は、算術平均の値である３．２３９６％よりも若干小さい。このように平均のとり方によって、結果は異なる。一般に、リターンの変動が大きければ算術平均は常に幾何平均を上回るとされている。[89]

[89] 参考文献Ａ上巻４９３頁。

なお、参考文献Ａ上巻４９３頁では、幾何平均の公式を、

$$\left(\prod_{t=1}^{T}\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}-1\right)^{\frac{1}{T}}$$

ではなく、

$$\left(\prod_{t=1}^{T}\frac{1+r_{m(t)}}{1+r_{f(t)}}\right)^{\frac{1}{T}}-1$$

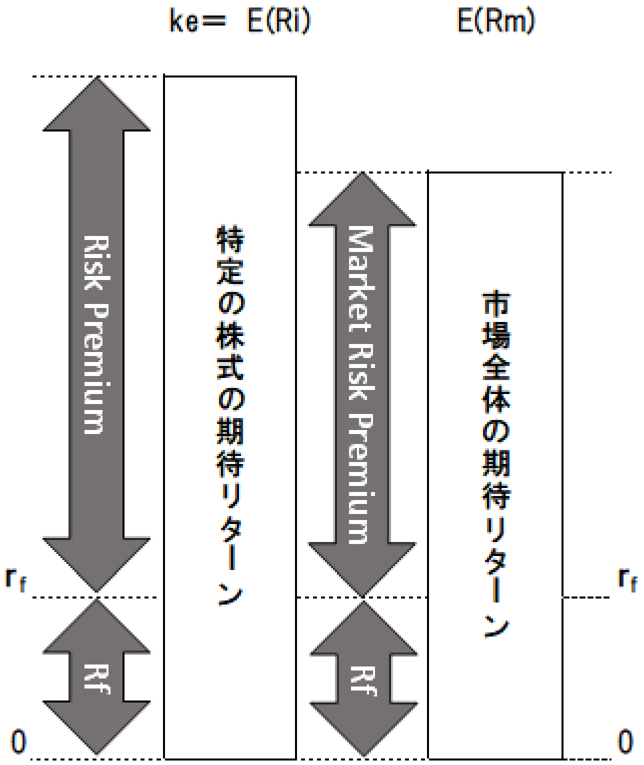
と紹介している（公式の導出過程の記載はないため、その理由は不明）。
その形の式の場合、先の設例の幾何平均値は、３．２３８５％となる。

１４　CAPM モデル（概論）

以下の図解を見て明らかなとおり、リスク・フリー・レート（r_f）とマーケット・リスク・プレミアム（$r_m - r_f$ ）を単純合算するだけでは、株主資本コストk_e　とは一致しない。何らかの想定（前提）を置いて、株主資本コストk_e　と　r_f　及び r_m　とを等式で結ぶ試みがなされている。CAPM はその代表的な方式である。[90]

Capital Asset Pricing Model (CAPM)は、以下のような想定を置いて、株主資本コストk_eを算出する考え方である。

想定「$r_i - r_f$　と　$r_m - r_f$　とは、比例関係にある」[91]



上記図解で表現すれば、左側の矢印部分すなわち *Risk Premium*　と右側の矢印部分すなわち　*Market Risk Premium*　とが比例関係にあるという想定である。[92]

---

[90] 他の手法として、Fama-French three factor model　や Arbitrage Pricing Theory (APT)もあるが（参考文献Ａ上巻の３４１～３４４頁、参考文献Ｂの２０６～２１０頁）、本書では触れない。

[91] 実際の CAPM モデルの主張は、比例関係を仮設の想定とはせず、「２３　CPAM モデルの論証」のように、理論的に導かれる帰結であると位置づけている。

[92] $E(R_i)$　は、本件 Investment（投資）対象株式のリターンの Expectancy（期待、予測値）の趣旨であり、会社経営者側から見れば、株主資本コストk_e　と同じである。

比例定数をβi で表すことにすると、[93]　上記想定は、以下の数式で表現できる。[94]　[95]

$$r_i - r_f = \beta_i(r_m - r_f)$$

r_fを右辺に移項すると、

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f)$$

となる。これが、CAPM 式と呼ばれるものである。[96]

式の要素を見ていくと、リスク・フリー・レート r_f は国債利回りなので、[97] どの対象企業の株式のリターンを計測する場合でも共通であり、数値は公開されている。マーケット・リスク・プレミアム　$r_m - r_f$　は、前項で検討したように、過去実績の平均計算で算出できる。[98]

問題は、比例定数βi である。βのみが対象企業によって値が異なる。βが決まれば、リスク・フリー・レートに、β倍したマーケット・リスク・プレミアムを加算することでて、株主資本コストk_e　が求められる。

βは、株式市場の価値に左右されにくい業態の会社の株式の場合は、１よりも小さい。例えば、シリアルとスナック食品メーカーであるゼネラル・ミルズ社の場合、β値は０．７３と推定されている。[99]　この場合、

・リスク・フリー・レート	r_f	…４．５％
・マーケット・リスク・プレミアム	$r_m - r_f$	…５．０％
・比例定数	β_{i}	…０．７３

とすると、ゼネラル・ミルズ社の株式のリターン（株主資本コスト）は、以下のとおり、

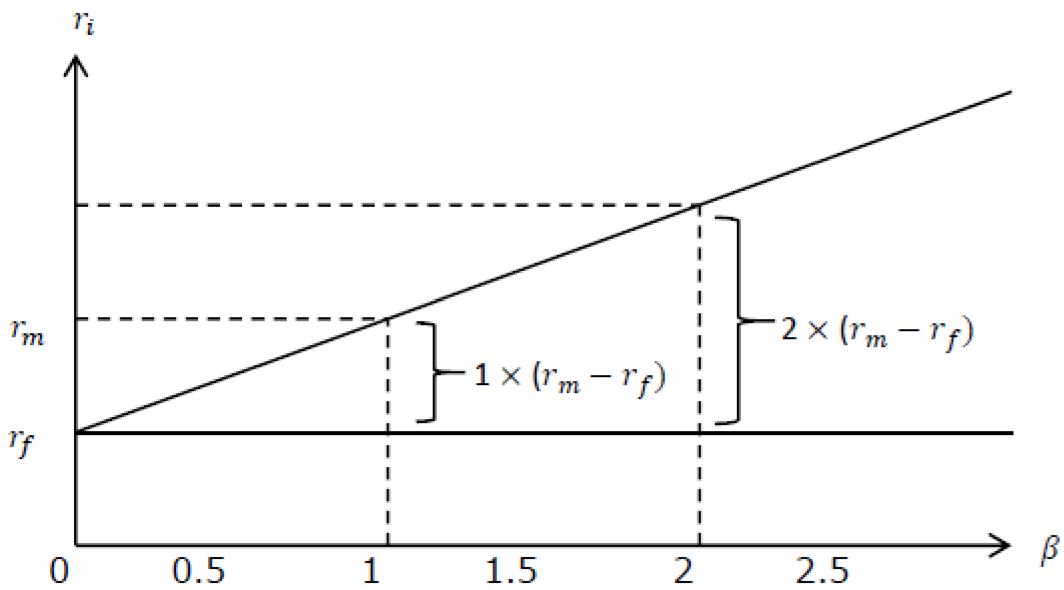
93 つまり、βは、株式市場全体の利回りに対する個別株式の利回りの連動性の度合いを指している（参考文献Ｃの７２頁）。
94 βにｉという下添え字がついているのは、βが対象株式ごとに異なる値をとりうるためである。
95 この想定に対しては、「株式の平均収益率と市場βとが正の相関関係にあるとの予測は、包括的な回帰分析の結果からは、実証できない。」との有力な批判がある（Fama, Eugene F., and Kenneth R. French. 1992. The Cross-Section of Expected Stock Returns. The Journal of Finance, vol. 47, no. 2, pp. 427–465. www.jstor.org/stable/2329112）。
96 参考文献Ｃ７２頁、参考文献Ｄ２３７頁。
97 １０年物の長期国債利回りが一般的に使用される。参考文献Ｄ２７１～２７５頁。
98 日本の実例では、カネボウ事件で８．５％の株式リスクプレミアムが用いられた（本書２１２～２１３頁）。米国のマーケット・リスク・プレミアムは、参考文献Ａ上巻の３３２頁によると、４．７～５．４％であるとされる。
99 参考文献Ａ上巻の３３９～３４０頁

約８．２％と計算できる。

$$
\begin{aligned}
r_i &= r_f + \beta_i(r_m - r_f) \\
&= 4.5 + 0.73 \times 5 \\
&= 4.5 + 3.65 \\
&= 8.15
\end{aligned}
$$

これは経済的には、市場全体の下落時に強い耐性を示す株式は、投資家から高い評価をその分受けるので、株価もあがり、期待収益率が低くなることを示している。

$$
\text{期待収益率} = \frac{\text{配当}}{\text{株価}}
$$



これに対して、β値が１の企業であれば、計算式は以下のとおりとなる。

$$
\begin{aligned}
r_i &= r_f + \beta_i(r_m - r_f) \\
&= r_f + 1(r_m - r_f) \\
&= r_f + r_m - r_f \\
&= r_m
\end{aligned}
$$

つまり、β値が１（すなわち市場全体の期待リターン r_m と完全連動している場合）の企業の株式のリターン（株主資本コストトk_e ）は、市場全体の期待リターン r_m をそのまま用いればよい。

他方で、テクノロジー企業のβ値は高くなる傾向にあり、この結果、株式のリターン（株主資本コスト）も高くなる。β値が高いということは、株式市場の影響を強く受けるため、ポートフォリオの分散投資の観点からは、収益率変動リスクを分散させること[100]に対する寄与度が低いとされるため、投資家を引き付けるには、より高いリターンが必要になるという構造にある。[101]

なお、株式リターンについては、株価の変動及び配当を考えるため、以下の式によるものとされている。[102]

$$\text{株式リターン} = \frac{\text{株価値上がり}+\text{期末配当}}{\text{期首株価}}$$

$$= \frac{\text{期末株価} - \text{期首株価} + \text{期末配当}}{\text{期首株価}}$$

市場リターンについても、同様である。

もっとも、株式は、配当が毎日なされているわけではない。将来に配当がなされることを前提に織り込んで株価形成がなされていると考えれば、株価の値上がり（または値下がり）の率をもって、収益率と扱うことになるのかと思われる。

[100] ポートフォリオの分散効果は、１２３頁で扱う。
[101] 参考文献Ａ上巻の３４０頁
[102] 参考文献Ｄ２６２頁

１５　β値の導出（概論）

上場会社の場合、株価等の情報が公表されているので、βについては、ここから逆算ができそうである。以下の Excel 表は、参考文献Ｃの７３頁に掲載のものを一部説明補充したものであるが､このように株価①と TOPIX② のデータがあれば(実査でデータを求める)、毎日の株価等の変動状況（③、④）は、計算可能である。[103] [104]

	①	②	③	④
	実査	実査	(当日①－前日①)÷前日①	(当日②－前日②)÷前日②
日付	A社株価	TOPIX	A社収益率	TOPIX収益率
1月5日	1853	1685.15		
1月6日	1876	1684.90	1.24%	-0.01%
1月7日				
1月8日				
1月9日				
1月10日	1843	1659.03	-1.76%	-1.54%
1月11日	1879	1672.44	1.95%	0.81%
1月12日	2000	1684.34	6.44%	0.71%
1月13日	2095	1681.69	4.75%	-0.16%
1月14日				
1月15日				
1月16日	2090	1670.15	-0.24%	-0.69%
1月17日	2040	1631.61	-2.39%	-2.31%
1月18日	1999	1574.67	-2.01%	-3.49%
1月19日	2020	1620.29	1.05%	2.90%

リスク・フリー・レートは、この株価変動があった当時の１月５日～１月１９日の間、一定で、年利率０．０６％であったとすれば、[105] その日利は３６５日で除した０．００１６％となるので（⑤）、本書５８頁の式、

$$r_i - r_f = \beta_i(r_m - r_f)$$

[103] 参考文献Ｄ２６３頁も同様の表によりベータ値を計算している。もっとも、株式によっては、特定日に全く取引がないこともあることから、同書では、週に１回の抽出データを基に計算することを提案している。

[104] 本書のように過去の株式市場の平均リターンから算出をおこなったものを Historical Market Risk Premium と呼ぶ。これに対して、予想配当等をもとに期待リターン（Implied Risk Premium）を算出する方式もある。参考文献Ｄ２５４～２６０頁。同書２５９頁に業界別の IRP 一覧が掲載されている。PLUTUS＋ MEMBER'S REPORT No.64「近年におけるインプライド・リスクプレミアムの動向」(July 31, 2015)

[105] １０年もの国債利回りを用いた。

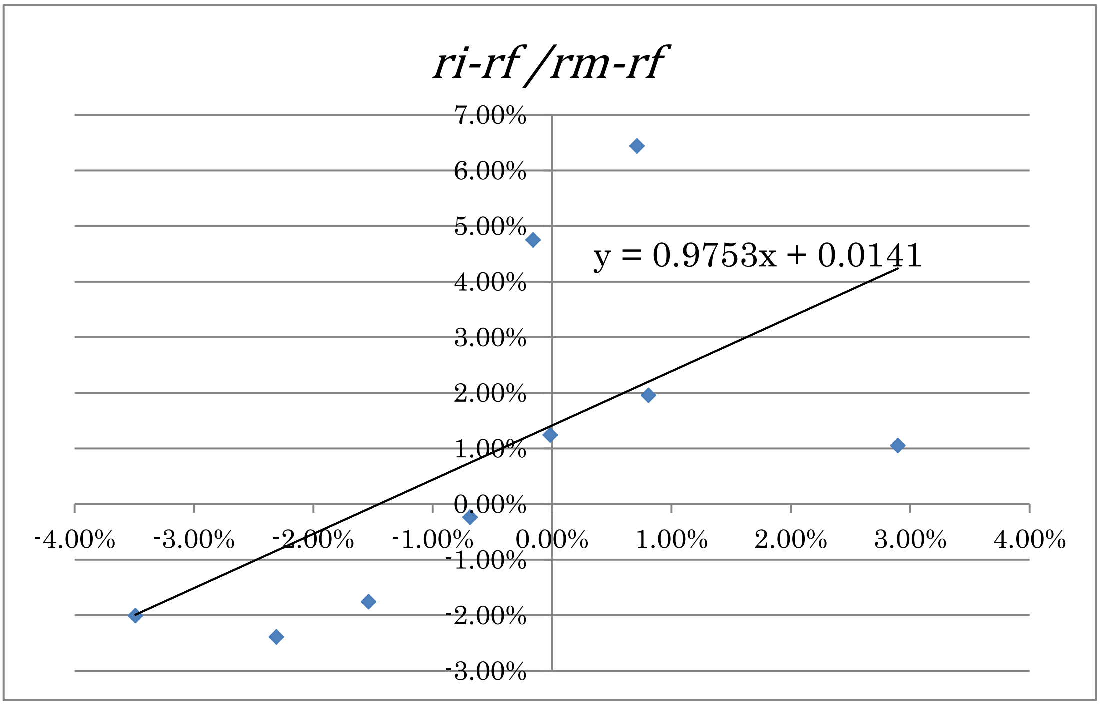
の左辺は③－⑤で求められ（⑥）、右辺のうちβを除く部分は、④－⑤で求められる（⑦）。そうすると、⑥を⑦で除することで、β値が一律に決まりそうである。しかし、実際に除算を実行すると、値は以下の計算結果のとおり、区々の値をとる（⑧）。

⑤	⑥	⑦	⑧
国債年利回／365	③－⑤	④－⑤	⑥÷⑦
r_f	r_i-r_f	r_m-r_f	β？
0.00016%	1.24%	-0.01%	-8274%
0.00016%	-1.76%	-1.54%	115%
0.00016%	1.95%	0.81%	242%
0.00016%	6.44%	0.71%	905%
0.00016%	4.75%	-0.16%	-3016%
0.00016%	-0.24%	-0.69%	35%
0.00016%	-2.39%	-2.31%	104%
0.00016%	-2.01%	-3.49%	58%
0.00016%	1.05%	2.90%	36%

　これは何を意味しているのか。ひとつの考え方としては、上記βを比例定数とする利回りの比例関係は実際には存在しないとして、上記想定を全部排除して、新たな式を考えるという方向が考えられる。他方で、（そうは言っても他に有力な見解がない限りは、上記比例関係の考え方を活かすことにして）、正確な比例関係はないかもしれないが、概ね一次関数的な関係があれば（すなわち、市場利回変動と個別株価変動には緩やかな連動性があるという程度の関係）、多少の誤差は目をつむるという考え方である。以下では、後者の現実路線に従い、検討を続ける。

　βを比例定数とする利回りの比例関係が概ねあてはまるはずだとの想定に立った場合、実際に、どの程度のずれがあるのかを観察することが有意義である。そこで、⑥の$r_i - r_f$　を縦軸に、⑦の$r_m - r_f$　を横軸にデータをグラフ上にプロットしてみると、以下のとおり散布図が描ける。[106]

[106] 手で描いてもよいが、本書では Excel のグラフ機能（散布図）を用いた。該当列（今回は２つの列）を選択し、グラフ→散布図と指定すれば、自動的に散布図が作成される。



散布図を見ると、なんらかの正の相関関係（即ち右肩あがり直線の関係）があると言えそうな状況である。よって、これらの点の方向性を活かして、直線を描いてみる。上記グラフは、Excel にそのような直線を描画させたものである。丁寧なことに、数式も一緒に表示されるので、x（横軸すなわち *rm-rf*）と *y*（縦軸すなわち *ri-rf*）の関係が数式上もわかる。この数式の傾きがβi なのだから、Excel によると、βi＝０．９７５３である（切片は０．０１４１）。

では、Excel は、このグラフ上の直線をどのように求めたのか（すなわちβi という傾きや切片の値をどのように算出したのか）。人間が同じことを行う場合の一つの方法としては、上記グラフ上にプロットされた各点の分布状況を遠目で観察して、なるべく多くの点の分布状況と一致するように斜めの一本線を手で引いてみるという手法がある。このような（職人芸的な）方法でも、概ね正しい直線が描けるのかもしれないが、客観性には乏しい。上記グラフでは、数学的手法で（すなわち作業者の主観に依拠する部分を少なくした再現性・検証可能性のある手法で）、斜め線を求めることにして（回帰分析）、[107] その作業及び描画を Excel に実行させている。[108]

なお、参考文献Ｃの７３～７４頁では、Ａ社株価及び TOPIX の日時終値データを更に大量に採ったうえで（紙面上では省略されているようであるが）、日時収益率（TOPIX 収益率, Ａ社収益率）を計算し、表計算ソフトに搭載されている回帰分析機能を使用して、β値を０．８９７と求めている。

[107] β値導出に用いる回帰分析（最小二乗法）の仕組みは、「１６　単回帰分析」で扱う。
[108] Excel で散布図グラフを作成後、各点のいずれかを選択して、近似曲線の追加→線形近似を指定すれば、上記のような直線が描画される。オプションとして、式の明示機能・上記式がどの程度確からしいかの指標も一緒に表示させる機能もある。

なお、同一企業内に複数の事業がある場合のβ値については考慮を要する。この点、最終算定対象が企業価値ひいては株主価値であるときでも、個別の事業部門のベータ値の方が、企業のベータ値よりも有意性が高いから、事業ごとに事業価値を算定するのが適当であるとされる。[109] カネボウ事件でも、以下のとおり、事業部門別のβ値を出している（本書２１２頁）。

食品事業　０．６７７
ＨＰ事業　０．５９８
薬品事業　０．５２１

非上場会社については、どうするか。上場会社については、株価データが公表されているが、非上場会社にはこのようなデータがない。この場合は、株価データがないので推計によるしかない。この点、日本公認会計士協会から発表されている参考文献Ｃの７５～７６頁では、以下の式により、上場している類似会社のβ等を利用して間接的に推定する方式が紹介されている。[110]

$$\beta_x = \beta^*(1 + (1 - T)\left(\frac{D}{E}\right)$$

- β_x … 求めたい非上場会社のベータ値
- β^* … 上場類似会社の無負債ベータ
- T … 限界税率
- D … 負債価値
- E … 株主資本価値

また、非上場会社への投資家は、分散投資をおこなわないケースも多い（私財をほぼ全て投入していたり、「人生＝会社経営」のような強い関与をしていたりする場合）。よって、マーケット・ポートフォリオ[111] の分散投資によるリスク減少効果[112] が全くないと評価しうることもある。よって、この部分を非上場会社のβ値算定には入れないで評価する、トータルβという考え方もある。[113]

---

109 参考文献Ａ上巻４５１頁、１７章「事業単位ごとの企業価値評価」
110 この式がどのような前提で、どのような考え方で導出されたのかは、「２６　有利子負債コスト　k_d」で述べる。
111 Portfolio。資産投資は種々の組み合わせがあり得る。投資家は、変動リスク管理のために自らの資産を複数の金融商品に分散させて投資する。その金融商品の組み合わせは、ポートフォリオ（語義イメージは、平らなケースに入った一群の書類）と呼ばれる。
112 本書１２３頁で扱う。
113 本書１４８頁。参考文献Ｄ２８６頁。

１６　単回帰分析

Excel にて、上記の直線描画ができることは分かったが、どのような理屈に基づき、直線描画をしたのかが気になる。この点、Excel は、回帰分析という数学的な考え方を用いて、いくつもの点座標データをもとに、概ね正しい直線を求めている。以下、その回帰分析が、どのような仕組みなのかを明らかにしておく。

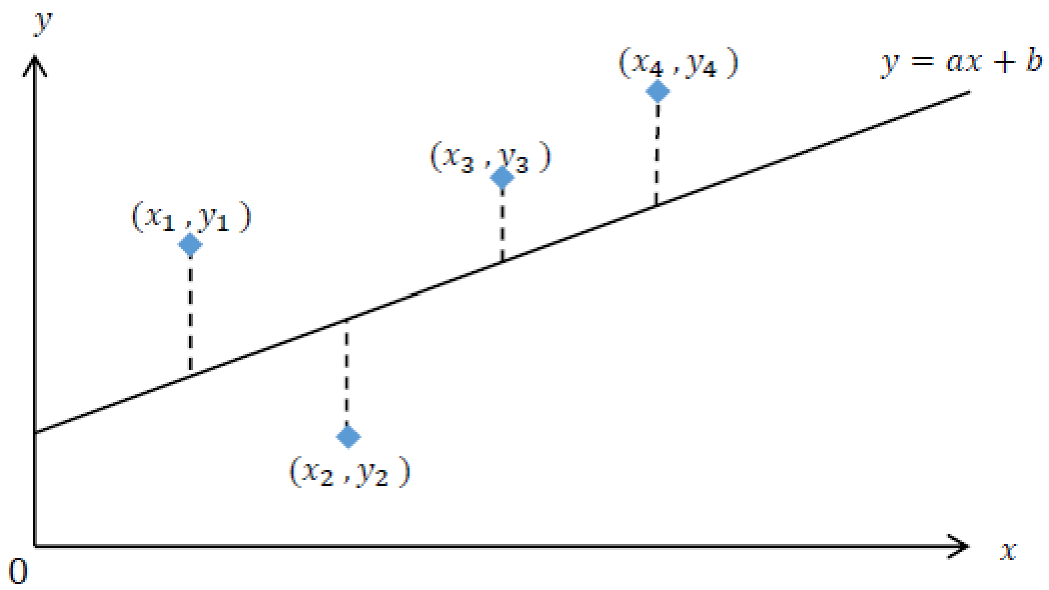
回帰分析は、多くのデータ (x, y) がある場合に、そのデータを基にして、例えば、

$$y = ax + b$$

という方程式を逆算して求めるという手法である。ここで、

- y … 変数
- x … 変数
- a … 傾き（回帰係数）
- b … 切片

であり、回帰分析では、大量の（x, y）データを与えて、各データを概ね満足させる統一ルールとして、$y = ax + b$ を導出する。[114] 多少のデータは、求めた式からは離れてしまうかもしれない。しかし、これはやむを得ないと割り切る。



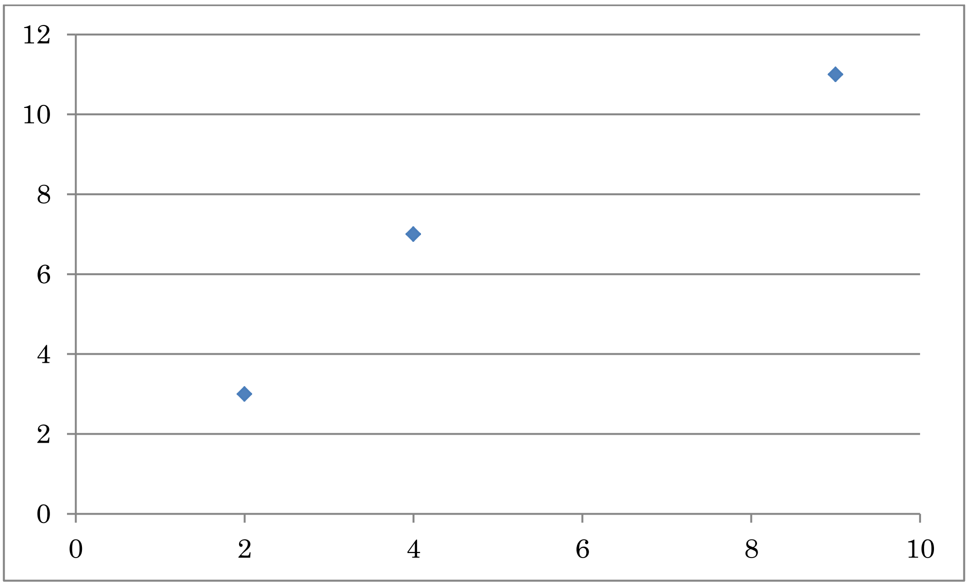
114 例えるならば、多数の裁判例の事例判断の集積から、背後にある共通ルールとしての判例法理を抽出するような作業工程である。

この背景にある考え方は、「最大多数の最大幸福」[115] 的な考え方である。すなわち、上記の図版にあるとおり、実際のデータの値と回帰式から求められる値との差を最小にするような、傾きと切片を求めるというものである。

誤差を小さくとは言うものの、データの数は一つではない。あるデータの顔を立てて直線を接近させて誤差を小さくすれば、他のデータとの関係で誤差が拡大しかねないという状況にある。そこで、考えるに、例えば、データの数が３個あれば、誤差も３個あるので、３個の誤差を全部足したうえで、その合計値が最小値（０なら一番良い）をとるように傾き a と切片 b を求めてみるという方針を思いつく。以下、その方針で検討をする。

$$(x,\quad y)\quad =\quad (2,\quad 3),\quad (4,\quad 7),\quad (9,\quad 11)$$

というデータの組を考える。



ここで、求める式（回帰式という）を

$$y = ax + b$$

とすると、仮に、最初の組の（２，３）から数字をとって、回帰式の x に２を代入すると、計算式の上で対応する y は、

$$\begin{aligned} y &= a2 + b \\ &= 2a + b \end{aligned}$$

[115] 英国の行政法学者・弁護士の Jeremy Bentham は、正しい法政策とは「最大多数個人の最大幸福」（the greatest happiness of the greatest number）をもたらすものであるとし、法政策の計量化評価を提唱した。

となる。しかし、真の y の値は、３なのであるから、誤差は、両者の差をとって、

$$3-(2a+b)$$

となる。同様に、x に４、７を代入すると、計算式の上で対応する y が導かれ、これと真の y の値である７、１１との誤差は、それぞれ、

$$7-(4a+b)$$
$$11-(9a+b)$$

となる。これで３つの誤差が揃ったが、どのようにして和をとるのか、その方針が問題となる。試みに、全部を単純に合計すると、[116]

$$21-(15a+3b)$$

となるが、これが最小になる（例えば０になる）条件は、

$$21-(15a+3b)=0$$

というだけであり、これを変形してみても、

$$21=15a+3b$$
$$7=5a+b$$

という a と b の関係式が導かれるだけで、具体的な a,b が求められない。どうも、この考え方では上手く行かないようである。

そこで、次の考え方として、各誤差を二乗してから足すとの方針を採る。すなわち、

$$\big(3-(a2+b)\big)^2$$
$$\big(7-(a4+b)\big)^2$$
$$\big(11-(a9+b)\big)^2$$

を全部足してみる。そのうえで、誤差の合計値が最小になるような（すなわち最も各点からのズレが小さいと思われる）直線の条件（具体的には傾きと切片）を求めてみる。[117]
各誤差を実際に展開計算してみると、

[116] 最小絶対値法という名称がついている手法である。
[117] 二次式にすれば放物線がうまれて極小値ひいては最小値も生まれやすいという直感的発想によるものであるが、理論的にも最小二乗法という名称がつけられている近似方法である。誤差が正規分布に従うときに有効である。約二世紀前に欧州で考案された。

$$
\begin{aligned}
\left(3-(a2+b)\right)^2 &= 9-2\times 3\times (a2+b)+(a2+b)^2 \\
&= 9-(12a+6b)+4a^2+4ab+b^2 \\
&= 4a^2-12a+4ab+9-6b+b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(7-(a4+b)\right)^2 &= 49-2\times 7(a4+b)+(a4+b)^2 \\
&= 49-(56a+14b)+16a^2+8ab+b^2 \\
&= 16a^2-56a+8ab+49-14b+b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(11-(a9+b)\right)^2 &= 121-2\times 11(a9+b)+(a9+b)^2 \\
&= 121-(198a+22b)+81a^2+18ab+b^2 \\
&= 81a^2-198a+18ab+121-22b+b^2
\end{aligned}
$$

であるから、この二乗された３つの誤差を合計する。合計したものは、変数 a と変数 b が組み合わさった式になっているので、これを a と b の関数として、$f(a, b)$ と表現することにすると、[118]

$$
\begin{aligned}
f(a,b) = 4a^2-12a+4ab+9-6b+b^2 \\
+16a^2-56a+8ab+49-14b+b^2 \\
+81a^2-198a+18ab+121-22b+b^2
\end{aligned}
$$

$$
=101a^2-266a+30ab+179-42b+3b^2
$$

となる。この$f(a,b)$が最小となるときの a, b の値を求めればよい。
$f(a,b)$が最小となるとき、$f(a,b)$は極小値をとるので、そのときの微分係数は０となる。[119]
そこで、$f(a,b)$ を a について偏微分した

$$
\frac{\partial f}{\partial a}=202a-266+30b
$$

及び $f(a, b)$を b について偏微分した

$$
\frac{\partial f}{\partial b}=30a-42+6b
$$

のいずれもが０である必要がある。すなわち、以下の２式を同時に満たすべきである。

[118] f は、*function*（関数）の頭文字である。もっとも、f で足りないときは、アルファベットの順番に従い、g や h も使うのが慣例である。
[119] この部分の理屈については、「１７　二変数関数と偏微分」で扱う。

$$\begin{cases} 202a - 266 + 30b = 0 \\ 30a - 42 + 6b \quad = 0 \end{cases}$$

ここで、（上の式）－５×（下の式）とすると、

$$\begin{aligned} (202 - 150)a - (266 - 210) + (30 - 30)b &= 0 \\ 52a - 56 &= 0 \\ a &= \frac{56}{52} \\ &= \frac{14}{13} \end{aligned}$$

この結果を、下の式に代入すると、

$$\begin{aligned} 30a - 42 + 6b &= 0 \\ 5a - 7 + b &= 0 \\ b &= 7 - 5a \\ &= 7 - 5 \times \frac{14}{13} \\ &= \frac{7 \times 13 - 14 \times 5}{13} \\ &= \frac{21}{13} \end{aligned}$$

よって、

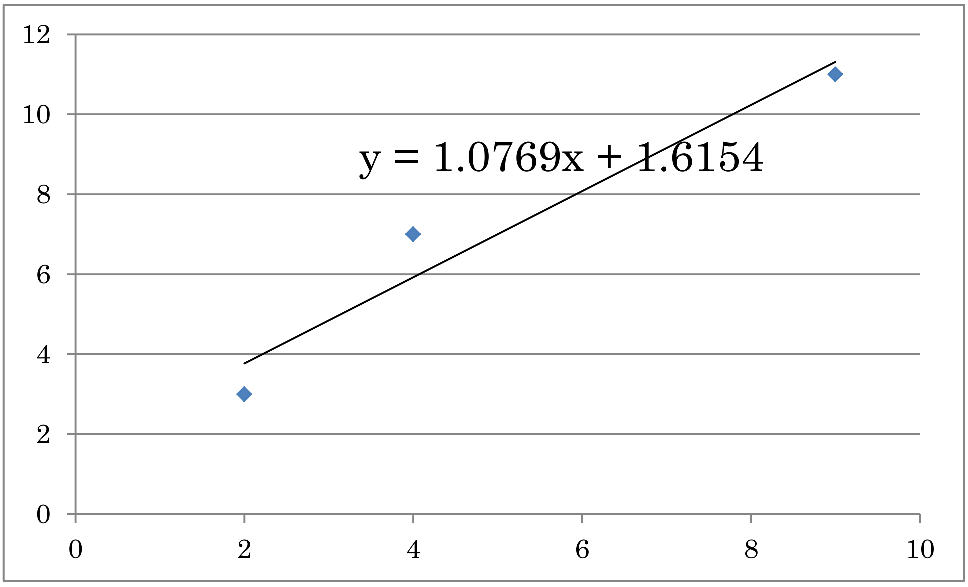
$$(a, b) = \left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}\right)$$

のときに、二乗された誤差の合計値である *f(a, b)*は最小値をとる。[120]
このとき、回帰式は、

$$y = \frac{14}{13}x + \frac{21}{13}$$

となる。
これを上記グラフに表示すると、以下のとおりとなる。

[120] 一般に微分係数が０であることは最小値を与える必要条件に過ぎないが、二変数の二次関数につき、最小値を与える候補はひとつと考えた。



このように、概ね各点との距離の差が小さい箇所を通過していく直線が導出できた。これが、回帰分析の計算原理である。散布図グラフにプロットする点が多くなっても、理屈は同じである。点が２００個あれば、２００個の点との誤差（を二乗したもの）の合計値が最も小さくなるように、傾きと切片を計算で決めて、直線を引くわけである。

もちろん、ほかにも、多くの点の分布状況を概ね表す式を求めるアイディアはあるかも知れない。例えば、以下のようなアイディアもあり得る。

・ｙ軸方向の差をとった今回のやりかたを９０度変更してｘ軸方向で差をとってみる
・ｘ軸とｙ軸とを公平に扱って各点から直線におろした垂線の長さを基準に誤差をはかってその誤差を最小にしてみる
・２乗ではなく３乗で誤差を最小にしてみる
・そもそも直線ではなく曲線ではないかということで、$y = ax^2 + bx + c$ や一般式 $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + ux^2 + vx + w$ で誤差を出してみる

しかし、実務的に簡明であり、ある程度の説得力を持っているのは、現状では、CAPM を前提とする上記一次関数による把握方法のようである。

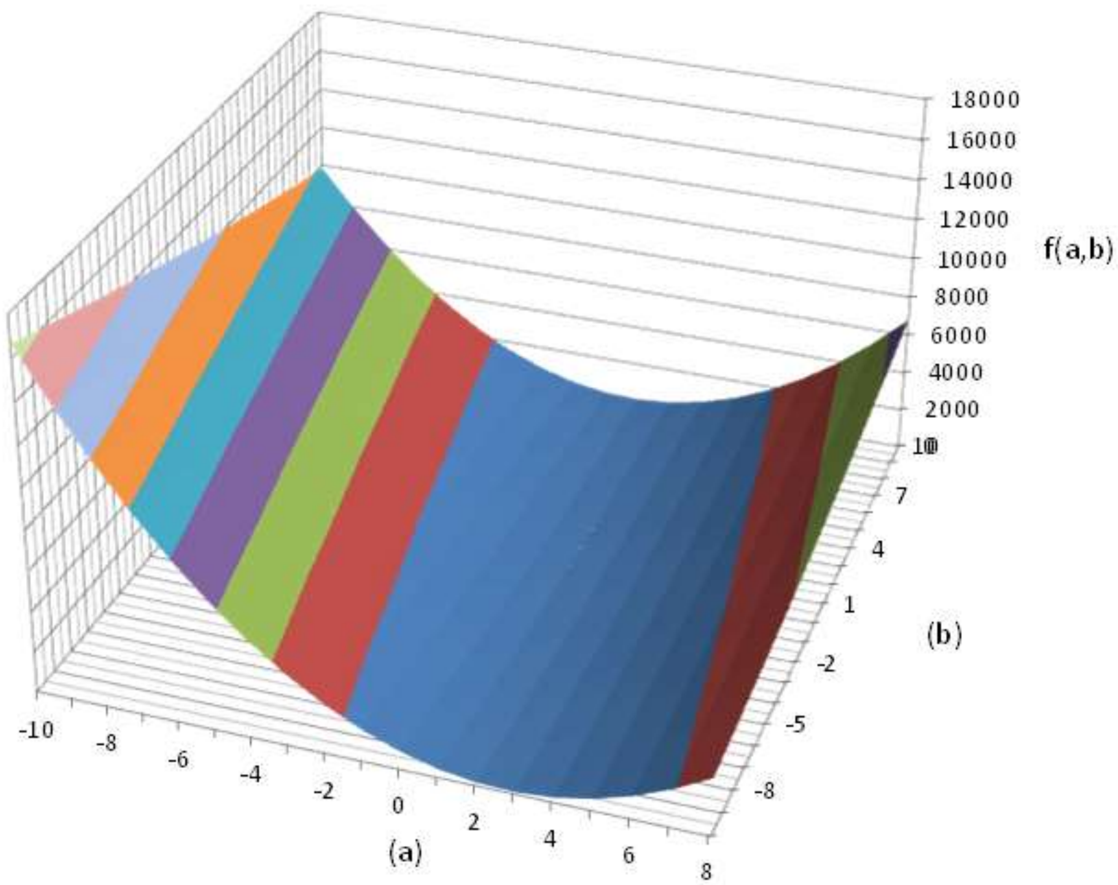
１７　二変数関数と偏微分

前項では、誤差を小さくしたい　→誤差を$f(a,b)$で表してみた　→$f(a,b)$が最小となる条件　→$f(a,b)$は極小値をとる筈　→$f(a,b)$　を偏微分して０と等置して連立方程式を解く、という具合に、話が進んでいったが、それはどのような理屈なのか。本項では、その点の理屈を示す。

例えば、以下の二変数関数$f(a,b)$ が最小となるときの a,b の値を求めることを考えてみる。[121]

$$f(a,b) = 101a^2 - 266a + 30ab + 179 - 42b + 3b^2$$

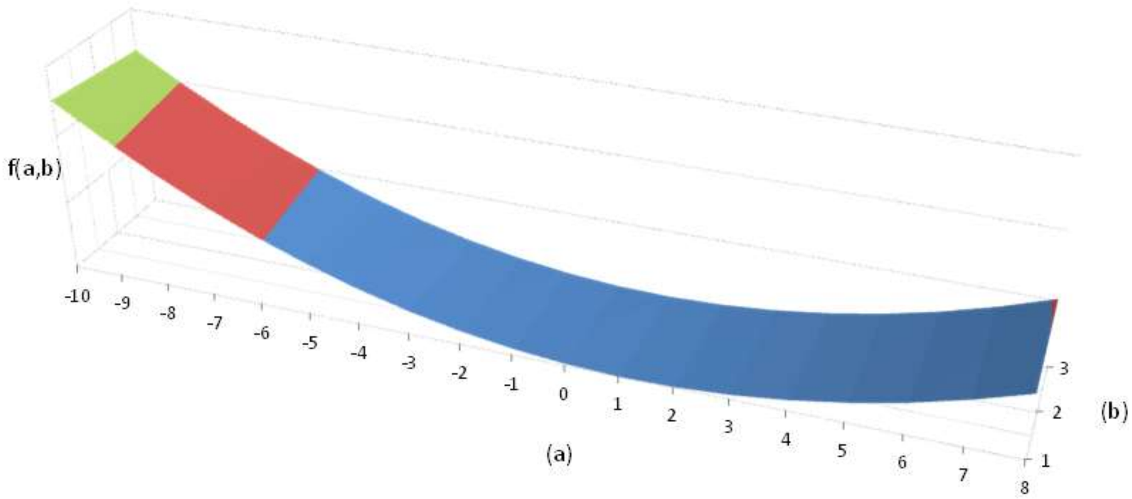
試みに、水平面の横軸に a（－１０～８）、水平面の奥行軸に b（－１０～１０）、垂直軸に$f(a,b)$ をとって、等高線グラフを作成してみたものが、以下のものである。



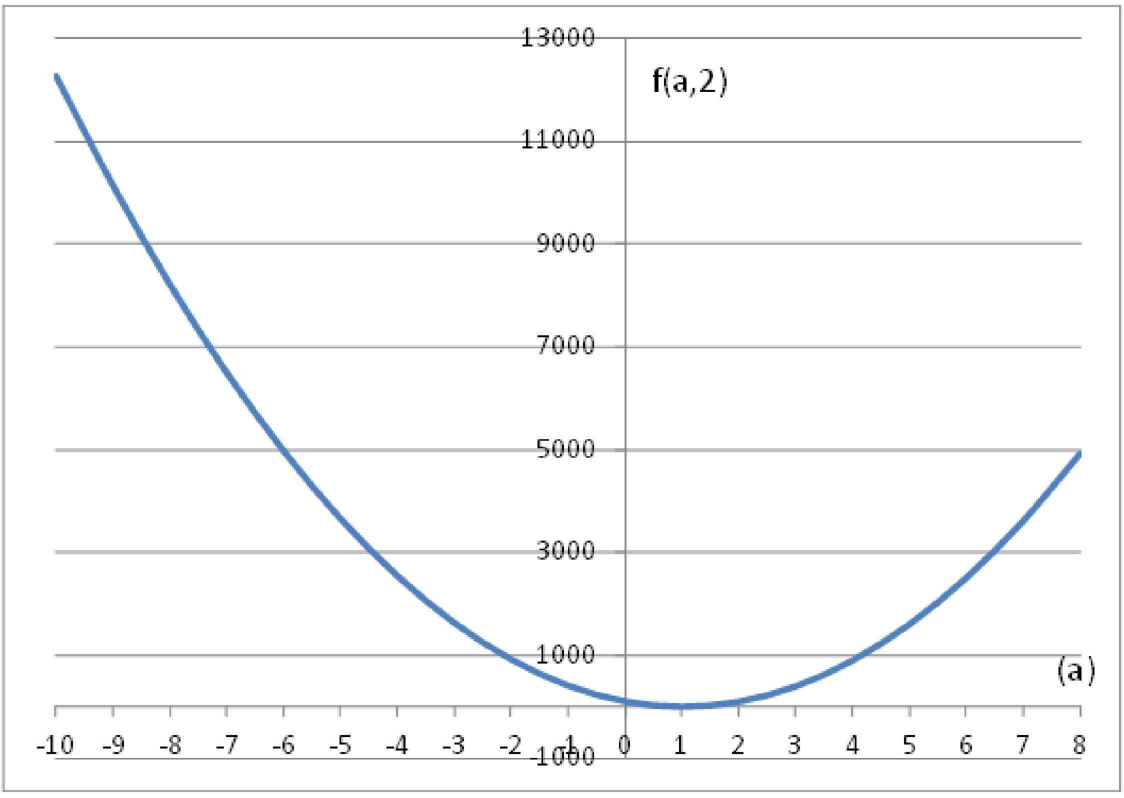
垂直軸の $f(a,b)$ は誤差の大きさを示している。すなわち、この湾曲面は誤差の大きさを

[121] この関数は、「１６　単回帰分析」における具体例、点$(x,y) = (2,3)(4,7)(9,11)$ と回帰式 $y = ax + b$ との間の誤差（二乗されたもの）３つを合計した式である（本書６８頁）。つまり、適当に引いた直線と、散布図のプロット各点との誤差の大きさを示す。

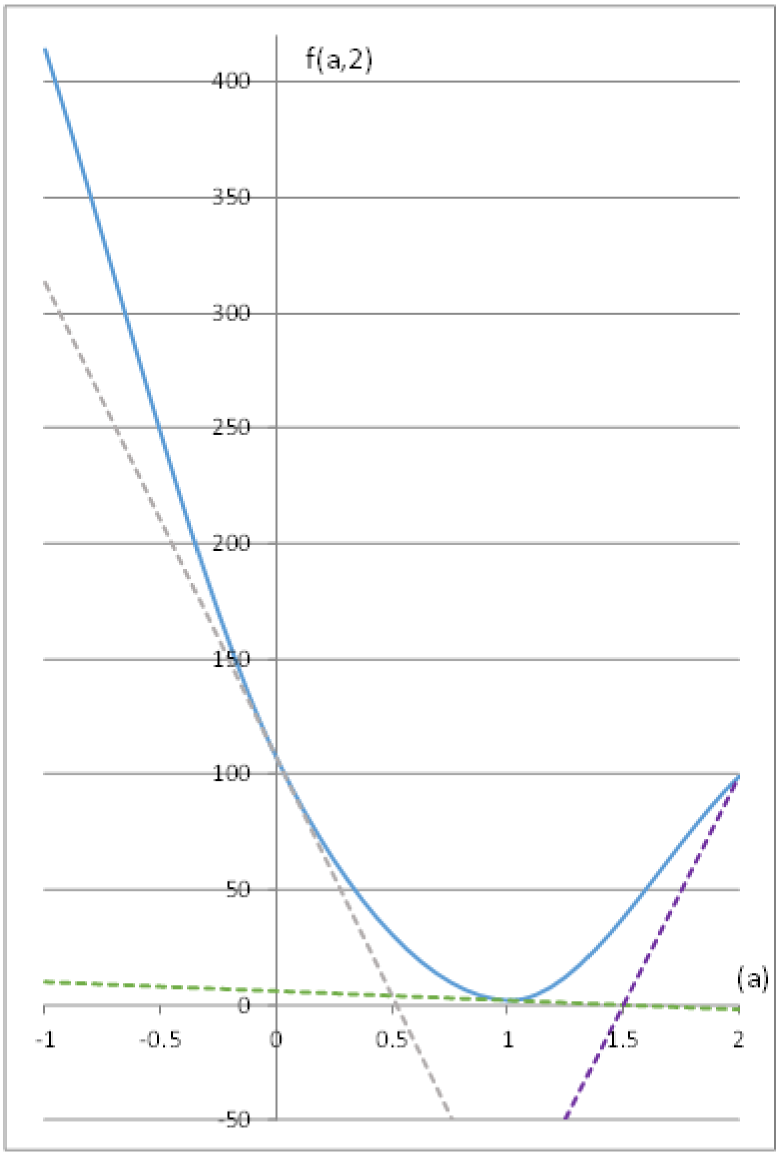
示す曲面である。この誤差が最小値をとる a, b の組み合わせを知りたい。直感的に考えて、上記グラフの曲面のうち下のほうに湾曲している部分の最も高度の低い箇所の a, b の値を求めればよい。曲面は、a 軸方向と b 軸方向とで曲がり方が異なるであろうから、分けて分析する必要がある。最初に a 軸方向で上記グラフの曲面を切り取る（具体的には、b の幅を１〜３と狭くした部分のみを抜き出してみる）。



この帯のようになった形状は、下に凸の放物線をしている。ｂの幅を更に小さくしていけば、曲面ではなく曲線になる。以下がその曲線である（b＝２と固定した場合の $f(a,b)$ すなわち $f(a,2)$ 曲線）。



このf(a,2) 曲線（f(a,b) 曲面をｂ＝２平面で切断した曲線）を観察すると、f(a,2) は、a＝１付近で最小値をとりそうである（縦軸の縮尺が粗いため目測確認は困難)。その付近を拡大してみると、以下の曲線（青色実線）となる（縦の縮尺を若干拡大した)。



曲線の最も小さい点は、目で見る限り、やはり a＝１付近にありそうである。しかし、a＝１に接線を実際に引いてみると、緑色破線のようになる（完全な水平にはならない)。曲線の接線は、a＝０では右下がりだが（灰色破線)、a＝１でほぼ水平になり（緑色破線)、a＝２では右上がりに転じる（紫色破線)。これを踏まえると、接線の傾きが完全に水平になる箇所を計算で求めれば、その箇所で、$f(a,2)$ は最小値をとると言える。

では、接線の傾きは、どのようにして求めるのか。ここで傾きとは、要するに、a が少し増えた際の、$f(a,2)$ の増加分である。例えば、a が３だけ増加した際の、$f(a,2)$ の増加分が６であれば。傾きは、以下のとおり、２となる。

$$傾き = \frac{f(a,2)の増加分}{aの増加分}$$
$$= \frac{6}{3}$$
$$= 2$$

a の増加分を小さくとれば（その分 $f(a,2)$ の増加分も小さくなるが）、傾きはより正確に求めることができる（破線が放物線の内側にめり込むことなく、綺麗に接する線、すなわち接線となる）。ここで、a の増加分を h とすると、a は、

$$a$$

から、

$$a+h$$

へと増加するので、a の増加分は、

$$(a+h)-a=h$$

である。他方で、$f(a,2)$ は、

$$f(a,2)$$

から

$$f(a+h,2)$$

へと増加するので、その増加分は、

$$f(a+h,2)-f(a,2)$$

である。これを踏まえると、傾きは、

$$傾き = \frac{f(a+h,2)-f(a,2)}{h}$$

と表現をまとめることができる。

a の増加分を小さくとれば（すなわち h を無限に小さくすれば）、傾きは最高度に正確に求めることができる。以下の式は、そのような h を無限に小さくするとした場合（接線の傾き）を表す式である。

$$接線の傾き = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,2)-f(a,2)}{h}$$

この傾き（上記グラフ上の各破線の傾き）は、慣例上、以下のように表記され、関数 f を a で微分したものと呼称される（他の表記方法として、$f'(a)$ でも可）。[122]

$$\frac{df}{da}$$

偏微分（今回のように変数が a と b の二つあるが、とりあえずひとつの変数［今回は a］で微分）の場合は、以下のように表記する。[123]

$$\frac{\partial f}{\partial a}$$

この表記法を前提にすると、上記式は、以下のとおり記載される。

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,2) - f(a,2)}{h}$$

以下、右辺を変形して、$f(a,2)$ を a について偏微分してみる。$f(a,b)$ の具体的内容は、

$$f(a,b) = 101a^2 - 266a + 30ab + 179 - 42b + 3b^2$$

であったから、[124]　この式で、b＝２としたものが、$f(a,2)$ である。

$$\begin{aligned} f(a,2) &= 101a^2 - 266a + 30a \times 2 + 179 - 42 \times 2 + 3 \times 2^2 \\ &= 101a^2 - 266a + 60a + 179 - 84 + 12 \\ &= 101a^2 - 206a + 107 \end{aligned}$$

他方で、$f(a+h,2)$ は、上記式で、a を $a+h$ に置き換えて、

$$f(a+h,2) = 101(a+h)^2 - 206(a+h) + 107$$

である。よって、両者の差をとれば、

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,2) - f(a,2)}{h}$$

122　微分（differentiation）の頭文字 d をつけて微分であることを示す。$d \times f$ という意味ではない。
123　∂ は、「デル」、「ラウンドディー」等と呼称する。
124　本項の冒頭の式である（本書６８、７１頁）。

の右辺の

$$\lim_{h \to 0}$$

の右側にある分数のうち、分子を求めることができる。
すなわち、

$$\begin{aligned}
&f(a+h,2)-f(a,2)\\
&=101(a+h)^2-206(a+h)+107\\
&\quad-(101a^2-206a+107)\\
&=101(a+h)^2-206(a+h)-101a^2+206a\\
&=101(a+h)^2-206a-206h-101a^2+206a\\
&=101(a+h)^2-206h-101a^2\\
&=101(a^2+2ah+h^2)-206h-101a^2\\
&=101a^2+202ah+101h^2-206h-101a^2\\
&=202ah+101h^2-206h
\end{aligned}$$

他方で、分母は h のままである。
したがって、

$$\lim_{h \to 0}$$

の右側の分数は、以下のように整理される。

$$\frac{202ah+101h^2-206h}{h}=202a+101h-206$$

この式の h を０に無限に近づけていけば、上記の

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h,2)-f(a,2)}{h}$$

の値を求めたことになる。
すなわち、（h を０に無限に近づけていくので、$101h$ は０になり）

$$\begin{aligned}
&=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h,2)-f(a,2)}{h}\\
&=\lim_{h \to 0}(202a+101h-206)\\
&=202a+101\times 0-206\\
&=202a-206
\end{aligned}$$

となる。これが、b＝２としたときの、接線（上記グラフの破線）の傾きである。

この式の a に適宜の数値を入れることで、それに対応した$f(a,2)$ 曲線上の点$(a,f(a,2))$ における接線の傾きを求めることができる。例えば、曲線上の点$(1,f(1,2))$ すなわち、

$$
\begin{aligned}
&(1,f(1,2))\\
&=(1,101\times1^2-206\times1+107)\\
&=(1,101-206+107)\\
&=(1,2)
\end{aligned}
$$

における接線の傾きは、

$$\frac{\partial f}{\partial a}=202a-206$$

の a に１を代入すればよいから、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a}&=202\times1-206\\
&=202-206\\
&=-4
\end{aligned}
$$

となり、傾き－４、すなわち右下がりの直線であることがわかる。[125]
同様に、曲線上の点$(2,f(2,2))$ すなわち、

$$
\begin{aligned}
&(2,f(2,2))\\
&=(2,101\times2^2-206\times2+107)\\
&=(2,404-412+107)\\
&=(2,99)
\end{aligned}
$$

における接線の傾きは、

$$\frac{\partial f}{\partial a}=202a-206$$

の a に２を代入すればよいから、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a}&=202\times2-206\\
&=404-206\\
&=198
\end{aligned}
$$

[125] 前掲グラフ（７３頁）の緑色破線。グラフ上では傾きが緩やかに見えるが、これはグラフの縦の縮尺が粗いから、そのように見えるに過ぎない。

となり、傾き１９８、すなわち右上がりの直線であることがわかる。[126]
このように、b＝２と固定したときの接線の傾きは、

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 202a - 206$$

の a に、任意の数値を入力することで求めることができる。逆に言えば、同式（傾きを求めるための式）の計算結果が０になるような a を逆算すれば、これが傾き０に対応する a ということになる。実際にこれを計算してみると、

$$\begin{aligned} 202a - 206 &= 0 \\ 202a &= 206 \\ a &= \frac{206}{202} \\ &= \frac{103}{101} \end{aligned}$$

となる。
すなわち、b＝２と固定したときに、a を

$$a = \frac{103}{101}$$

とする $f(a,2)$ 曲線上の座標$\left(\frac{103}{101}, f\left(\frac{103}{101}, 2\right)\right)$ で現れされる点（[127] 以下、頂点という）における接線の傾きは０（水平）である。ここで、上記グラフの放物線は、下に凸である。すなわち、頂点より左側の領域の点は、頂点より上にある。同様に頂点より右側の領域の点も、頂点より上にある。これは、傾きを示す数式

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 202a - 206$$

において、色々な a を代入してみると、以下のような表となり、頂点より左側（すなわち a ＜$\frac{103}{101}$ ）では、傾き $\frac{\partial f}{\partial a}$ は常にマイナスの値をとり、$f(a,2)$ 曲線も右下がりであるのに対して、頂点で傾き $\frac{\partial f}{\partial a}$ は０となり（同点における$f(a,2)$ 曲線との接線は水平）、頂点より右

126 前掲グラフ（７３頁）の紫色破線。
127 具体的には、$\left(\frac{103}{101}, 101\left(\frac{103}{101}\right)^2 - 206\left(\frac{103}{101}\right) + 107\right) = \left(\frac{103}{101}, \frac{198}{101}\right) \fallingdotseq (1.01\ldots, 1.96\ldots)$となる。

側（すなわち $\frac{103}{101}$ ＜a では、傾き$\frac{\partial f}{\partial a}$ は常にプラスの値をとり、$f(a,2)$ 曲線も右上がりに転じることからも明らかである。

a	$-\infty$	･･･	$\frac{103}{101}$	･･･	∞
∂f/∂a =202a-206	$-\infty$	−	0	＋	∞
f(a,2)	↘	↘	→	↗	↗

以上を整理すると、$f(a,b)$ 曲面を b＝２で切り取った $f(a,2)$ 曲線における最小値は、$a=\frac{103}{101}$ により与えられる。

では、b＝２と限定しない場合、どのような a であれば、$f(a,b)$ で表される曲面は最小値をとるのだろうか。これまでの論理を前提とすれば、方針は定まる。すなわち、$f(a,b)$ を a について偏微分すれば、b を各々固定した数（定数）とみなした場合の、横軸 a、縦軸$f(a,b)$ グラフの各点における接線の傾きを示す式が得られるはずである。そして、その接線の式が０となるような a を求めれば良い。

そこで、$f(a,b)$を、以下のとおり、a について偏微分（すなわち b は定数として処理）してみる。

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}=\frac{\partial(101a^2-266a+30ab+179-42b+3b^2)}{\partial a}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

において、[128]

$$\lim_{h\to 0}$$

の右側にある分数のうち分子は、以下のとおり整理される。

$$\begin{aligned}&f(a+h,b)-f(a,b)\\&=101(a+h)^2-266(a+h)+30(a+h)b+179-42b+3b^2\\&\quad-(101a^2-266a+30ab+179-42b+3b^2)\end{aligned}$$

128 微分公式 $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ を用いることも可能であるが（同公式の証明は９２頁）、ここでは、計算量が多いわけではないので、微分の定義どおりに計算をした。

$$= 101(a+h)^2 - 266(a+h) + 30(a+h)b$$
$$-(101a^2 - 266a + 30ab)$$
$$= 101(a+h)^2 - 266(a+h) + 30(a+h)b - 101a^2 + 266a - 30ab$$
$$= 101(a+h)^2 - 266a - 266h + 30ab + 30hb - 101a^2 + 266a - 30ab$$
$$= 101(a+h)^2 - 266h + 30hb - 101a^2$$
$$= 101(a^2 + 2ah + h^2) - 266h + 30hb - 101a^2$$
$$= 101a^2 + 202ah + 101h^2 - 266h + 30hb - 101a^2$$
$$= 202ah + 101h^2 - 266h + 30hb$$

他方で、分母は h のままである。
したがって、分数部分は以下のとおり整理される。

$$= \frac{202ah + 101h^2 - 266h + 30hb}{h}$$
$$= 202a + 101h - 266 + 30b$$

よって、h を０に近づけると、***101h*** の項は０に等しくなるので消滅し、

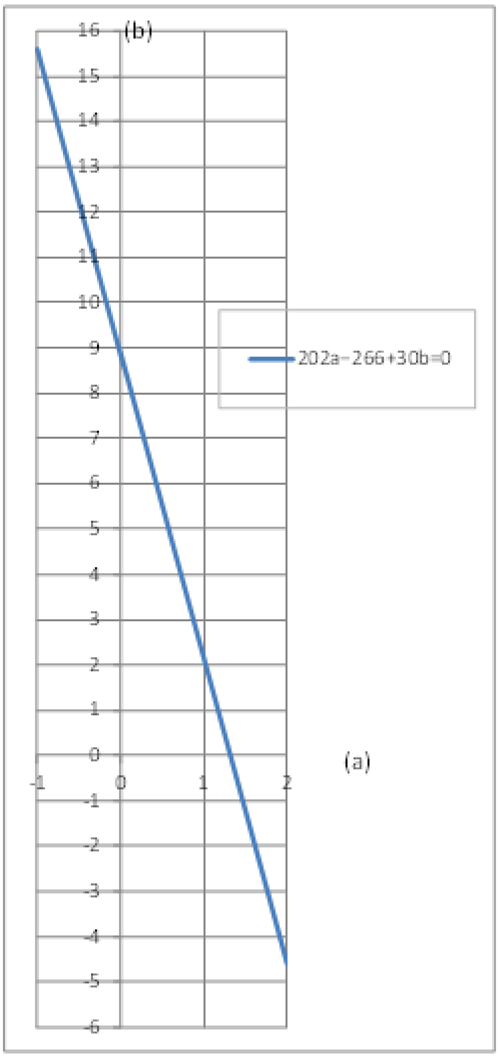
$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(202a + 101h - 266 + 30b)$$
$$= 202a - 266 + 30b$$

となる。
これが、０に等しいことが必要だというのであるから、

$$202a - 266 + 30b = 0$$

が、$f(a,b)$ 曲面が最小値をとる必要条件である。

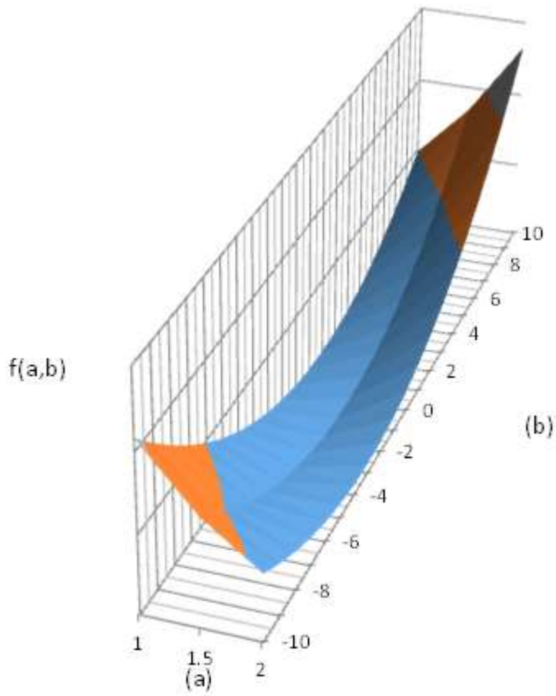
この式をグラフ化してみると以下のとおりとなる。



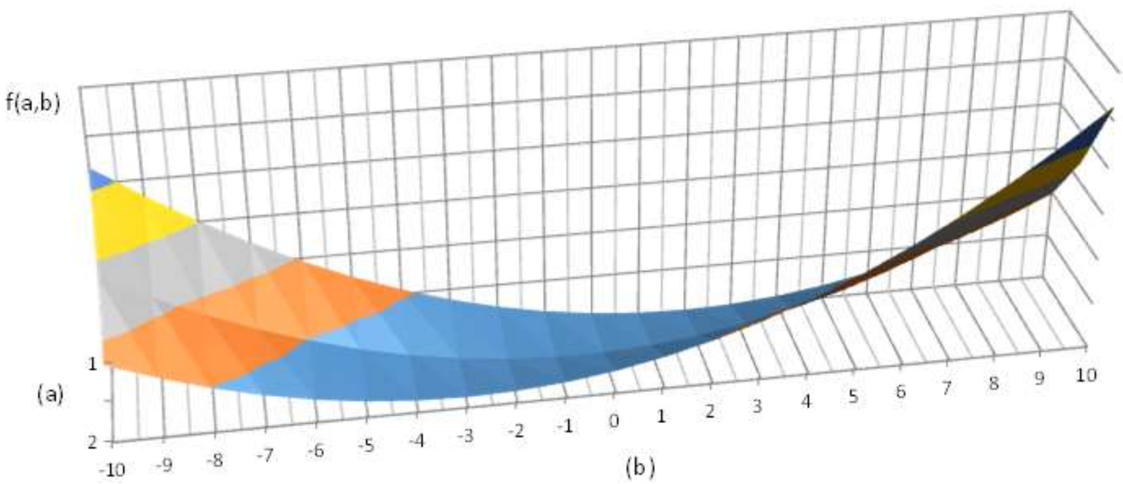
では、この直線上の　(a,b)　であれば、どのような値でも、　$f(a,b)$ 曲面が最小値をとるに十分な条件なのだろうか。他に制約条件はないだろうか。

ここで、a と b とは、ともに二変数関数$f(a,b)$ の変数であり、別段、そこに優先劣後の関係があるわけではないことを踏まえると、b を定数とみたてておこなった a についての条件確定作業は、同様に、a を定数とみたてた b についても同様に実施されるべきである。

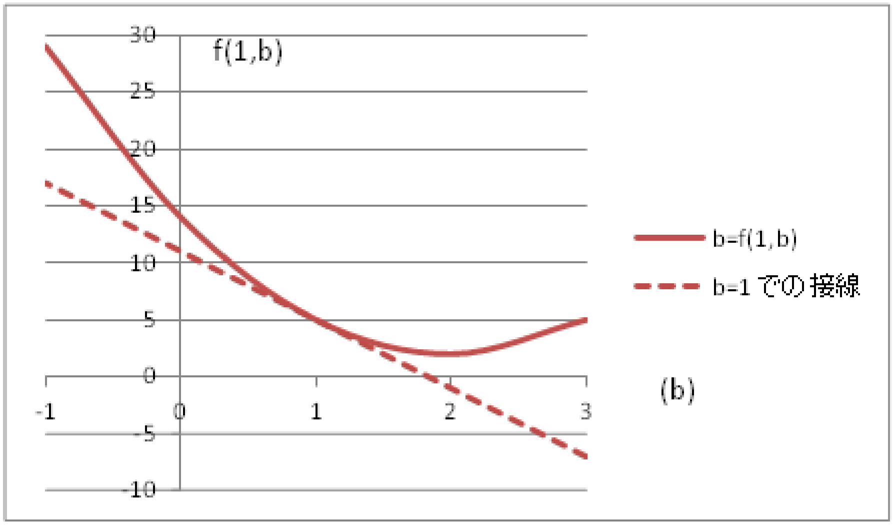
そこで、冒頭の$f(a,b)$　曲面グラフについて、b 軸方向で切り取ってみる（具体的には、a の幅を１～２にした部分のみを抜き出してみる）。



中央部分に下に凸の部分がありそうである。見やすくするために、垂直方向はそのままに維持したまま水平面で時計方向に回転させると、以下のとおりとなる。



やはり、b 軸方向についても、最小値を生む箇所がありそうである。そこで、$f(a,b)$ 関数を b で偏微分して得られた式についても、同様に 0 である場合の条件を求める。具体的には、以下のグラフ（例えば $a=1$ と固定した場合の b と $f(a,b)$ とのグラフ。すなわち、$f(1,b)$グラフ）の接線（破線直線）の傾きが 0 になるような b の値を、$a=1$ だけでなく、全部の a について求めていく（結果は、上記同様、a と b との関係を示す式になる筈である）。



上記方針は、数学的処理としては、上述したのと同様に、*b* について偏微分を実行し（すなわち、第一段階で、*b* が *b+h* に変化する場合の$f(a,b)$の変化量を *h* で割った式を求め、第二段階で、当該式について、*h* が 0 に接近した場合の極限値を見つける）、得られた式（傾きの式）が 0 に等しいとして、*a* と *b* との関係を示す方程式にすればよい。

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = \frac{\partial(101a^2 - 266a + 30ab + 179 - 42b + 3b^2)}{\partial b}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

において、

$$\lim_{h \to 0}$$

の右側にある分数のうち分子は、以下のとおり整理される。

$$\begin{aligned}
&f(a,b+h) - f(a,b) \\
&= 101a^2 - 266a + 30a(b+h) + 179 - 42(b+h) + 3(b+h)^2 \\
&\quad -(101a^2 - 266a + 30ab + 179 - 42b + 3b^2) \\
&= 30a(b+h) - 42(b+h) + 3(b+h)^2 \\
&\quad -(30ab - 42b + 3b^2) \\
&= 30ab + 30ah - 42b - 42h + 3(b+h)^2 \\
&\qquad -30ab + 42b - 3b^2 \\
&= 30ah - 42h + 3(b+h)^2 - 3b^2 \\
&= 30ah - 42h + 3(b^2 + 2bh + h^2) - 3b^2 \\
&= 30ah - 42h + 3b^2 + 6bh + 3h^2 - 3b^2 \\
&= 30ah - 42h + 6bh + 3h^2
\end{aligned}$$

他方で、分母は h のままである。
したがって、分数部分は以下のとおり整理される。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{30ah - 42h + 6bh + 3h^2}{h} \\
&= 30a - 42 + 6b + 3h
\end{aligned}
$$

よって、h を０に近づけると、$3h$ の項は０に等しくなるので消滅し、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (30a - 42 + 6b + 3h) \\
&= 30a - 42 + 6b + 3 \times 0 \\
&= 30a - 42 + 6b
\end{aligned}
$$

となる。
これが、０に等しいことが必要だというのであるから、

$$
30a - 42 + 6b = 0
$$

も、必要な条件となる。
これで、b について偏微分した場合の条件式も無事に導かれた。

いずれの条件式についても、同時に満たさないと、最小の中の最小とは言えないから、結局、以下の２式を同時に満たすべきであろう。

$$
\begin{cases}
202a - 266 + 30b = 0 \\
30a - 42 + 6b = 0
\end{cases}
$$

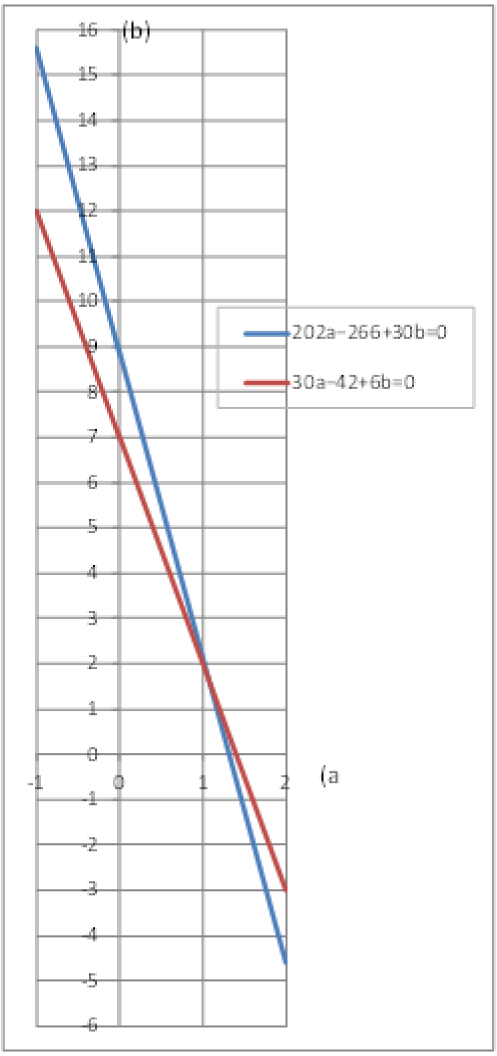
この連立方程式を解くと、[129]

$$
(a, b) = \left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13} \right)
$$

となる。

[129] 解き方は、６９頁と同じ。

この(a, b) の数値の組は、下記グラフのふたつの直線の交点である。



かかる二つの必要条件により、ひとつの点が一意に指定されるから、これ以上の絞り込みの必要はなく、$\left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}\right)$ が、二変数関数$f(a, b)$ が最小となるときの値である。

なお、理論上は、この点 $\left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}\right)$ が、鞍点や踊り場に過ぎないこともありうるが、それらでないことの証明は、冒頭の曲面グラフの形状に鑑み、本書では不要として省略した。[130]

[130] 鞍点や踊り場の実例・グラフは以下の url（解析学 II：近藤弘一［同志社大学教授］）を参照のこと。
http://tau.doshisha.ac.jp/lectures/2005.calculus-II/html.dir/node43.html)

１８　平方完成

偏微分を用いたほうが高速に求める必要条件を得られるのであるがこれを用いずに二変数関数の最小値を求める方法（別解）として、平方完成[131]による方法もある。この初等数学の方式でも、必要な解は得られる。[132]　すなわち、７１頁の$f(a,b)$ を式変形すると（最初に b について平方完成）、

$$
\begin{aligned}
f(a,b) &= 101a^2-266a+30ab+179-42b+3b^2\\
&= 3b^2-42b+30ab+101a^2-266a+179\\
&= 3(b^2-14b+10ab)+101a^2-266a+179\\
&= 3\{(b^2-2(7-5a)b\}+101a^2-266a+179\\
&= 3\{(b^2-2(7-5a)b+(7-5a)^2-(7-5a)^2\}+101a^2-266a+179\\
&= 3\{(b^2-2(7-5a)b+(7-5a)^2\}-3(7-5a)^2+101a^2-266a+179\\
&= 3\{b-(7-5a)\}^2-3(7-5a)^2+101a^2-266a+179\\
&= 3(b-7+5a)^2-3\left(49-70a+25a^2\right)+101a^2-266a+179
\end{aligned}
$$

となる。これは、

$$b-7+5a=0$$

のときに、初項が０となり、$f(a,b)$ が最小値として、

$$-3\left(49-70a+25a^2\right)+101a^2-266a+179$$

をとることを示している。
この最小値には変数 a が含まれているので、a について更に平方完成してみると、

$$
\begin{aligned}
&= -3\left(49-70a+25a^2\right)+101a^2-266a+179\\
&= -147+210a-75a^2+101a^2-266a+179\\
&= 26a^2-56a+32\\
&= 26\left(a^2-\frac{56}{26}a+\frac{32}{26}\right)\\
&= 26\left(a^2-\frac{28}{13}a+\frac{16}{13}\right)\\
&= 26\left(a^2-2\times\frac{14}{13}a+\frac{16}{13}\right)
\end{aligned}
$$

---

[131] 実数x,y において、$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2 \geqq 0$ のように、左辺を変形して右辺のように平方（２乗）の形を完成させ、それが０以上であることを証明に利用する方法である。

[132] しかも、偏微分による場合と違って、必要条件とともに十分条件も示すことができる。

$$= 26\left\{a^2 - 2 \times \frac{14}{13}a + \left(\frac{14}{13}\right)^2 - \left(\frac{14}{13}\right)^2 + \frac{16}{13}\right\}$$

$$= 26\left\{a^2 - 2 \times \frac{14}{13}a + \left(\frac{14}{13}\right)^2\right\} - 26 \times \left(\frac{14}{13}\right)^2 + 26 \times \left(\frac{16}{13}\right)$$

$$= 26\left(a - \frac{14}{13}\right)^2 - 2 \times \frac{14^2}{13} + \frac{26 \times 16}{13}$$

$$= 26\left(a - \frac{14}{13}\right)^2 - \frac{2 \times 14^2 - 26 \times 16}{13}$$

$$= 26\left(a - \frac{14}{13}\right)^2 - \frac{392 - 416}{13}$$

$$= 26\left(a - \frac{14}{13}\right)^2 + \frac{24}{13}$$

となり、これは、

$$a - \frac{14}{13} = 0$$

のときに、初項が０となり、最小値

$$\frac{24}{13}$$

をとることを示している。
以上をまとめると、$f(a,b)$　は、以下のとおりに変形することができ、

$$f(a,b) = 3(b - 7 + 5a)^2 + 26\left(a - \frac{14}{13}\right)^2 + \frac{24}{13}$$

上記$f(a,b)$　は、以下の２つの条件を共に満たす場合に、

$$\begin{cases} b - 7 + 5a = 0 \\ a - \dfrac{14}{13} = 0 \end{cases}$$

最小値である

$$\frac{24}{13}$$

をとると言える。
そこで、上記の連立方程式を解くと、

$$a - \frac{14}{13} = 0$$

$$a = \frac{14}{13}$$

であり、これを

$$b - 7 + 5a = 0$$
$$b = 7 - 5a$$

に代入して、

$$\begin{aligned} b &= 7 - 5 \times \frac{14}{13} \\ &= \frac{91}{13} - \frac{70}{13} \\ &= \frac{21}{13} \end{aligned}$$

したがって、二変数関数$f(a,b)$

$$f(a,b) = 101a^2 - 266a + 30ab + 179 - 42b + 3b^2$$

が最小となるときの a, b の値の組は、

$$(a,b) = \left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}\right)$$

である。[133]

133 これは、「１６　単回帰分析」における具体例、点$(x,y) = (2,3)(4,7)(9,11)$ において式 $y = ax + b$ とおくと、傾き$a = \frac{14}{13}$ 、切片$b = \frac{21}{13}$ のときに、誤差（の二乗）が最小となること（すなわち、誤差が最も小さい線引きの結果）を示している。事業価値算定の関係でいえば、この傾き$a = \frac{14}{13}$ がβ値に相当する。

１９　β値の一般解（最小二乗法）

これまで検討したことを整理すると、β値を回帰分析（最小二乗法）により求めるためには、以下のような手順を踏むことになる（偏微分による解法の場合）。

・過去データ y　…　$r_i - r_f$
・過去データ x　…　$r_m - r_f$

過去データ(x,y)を大量に集める

⇩

「過去データ y」と「回帰式 (y=ax+b) で求めたy」

との差を各々出す

⇩

上記差を各々２乗する

⇩

上記各２乗差を全データ分について合計した式を出す

⇩

上記合計式をa で偏微分する。

上記合計式をb でも偏微分する。

⇩

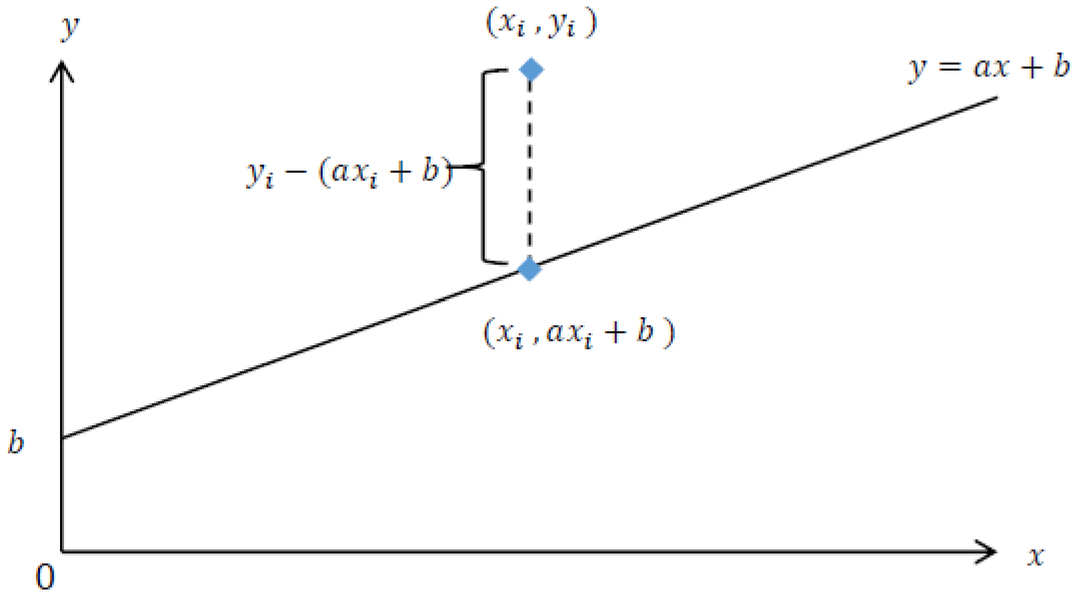
上記aで偏微分した式を＝０、

上記bで偏微分した式を＝０とし、

連立方程式として解く。

こうして求めた傾き a が、事業価値評価で使うβ値である。

毎回、このような手順を踏んで順に計算をおこなっても良いのであるが、あらかじめ、β値（＝傾き a）についての一般解を求めておけば、以後は、その公式に数字を入力するだけで、β値が求められて便利である。電子計算機を用いた自動計算もしやすくなる。そこで、以下、数学的処理をおこなって、β値（＝傾き a）についての一般解を求めてみることにする。



過去の実際のデータが N 個あるとする。[134]
それを次のとおり表すことにする。

$$(x_i, y_i) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots\dots\dots\dots.., (x_N, y_N)$$

また、回帰式を次のとおり表すことにする。 [135]

$$y = ax + b$$

誤差は、実際のデータ y と回帰式で求めた y との差であるから、

$$実際のy - 回帰式のy = y_i - (ax_i + b)$$

である。i は、実際には、１～N までであるから、上記の式も N 個分あるが、何百行も同じような式を書き連ねるのは無駄であるので、上記１行で N 個の式を全部表す一般式ということにする。この式を２乗すると、以下のようになる。

134 本書「２０　トヨタ自動車の β 値」では、約２００個のデータでβ値を実際に求めた。
135 a や b はこれから求める数値である。なお、回帰式の形が x の一次関数であるとの必然性はないが、一次関数であるとの想定に立脚しているのが、CAPM である。

$$\{y_i-(ax_i+b)\}^2$$

これも見た目は１行であるが、実際には、このようなものが N 個ある。これら N 個のものを全部足すとすると、以下のようになる筈である。

$$\{y_1-(ax_1+b)\}^2+\{y_2-(ax_2+b)\}^2+\{y_3-(ax_3+b)\}^2+\cdots+\{y_N-(ax_N+b)\}^2$$

しかし、毎回、N 個全部を書いていると長いので、通常は、以下のような簡略表記で同じことを表すことにしている（k に順番に１、２、３…N と入力して出てくる項目を全部足すという意味である）。

$$\sum_{k=1}^{N}\{y_k-(ax_k+b)\}^2$$

この式を、a や b で偏微分していく予定であるが、それに先立ち、以下、a 及び b を定数とみて、Σ演算規則に従い（巻末の定義・公式索引を参照）、展開してみる。

$$\sum_{k=1}^{N}\{y_k-(ax_k+b)\}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\{y_k^2-2(ax_k+b)y_k+(ax_k+b)^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\{y_k^2-2ax_ky_k-2by_k+(ax_k+b)^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\left\{y_k^2-2ax_ky_k-2by_k+(ax_k)^2+2ax_kb+b^2\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\left\{y_k^2-2ax_ky_k-2by_k+a^2x_k^2+2abx_k+b^2\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}y_k^2-2\,a\sum_{k=1}^{N}x_ky_k-2b\sum_{k=1}^{N}y_k+a^2\sum_{k=1}^{N}x_k^2+2ab\sum_{k=1}^{N}x_k+Nb^2$$

このまま計算を続けても構わないが、y や x のいずれも、下添え字 k について１～N まで変化させたうえで合算するものとされているので、式を見やすくするため、当面の間は、

$$\sum_{k=1}^{N} \quad = \Sigma$$

$$x_k = x$$
$$y_k = y$$

と簡略表記して、式変形を続けてみる（しかるべき時点で元に戻す予定)。
この簡略表記を前提にすると、上記の長い式は、以下のように表記される。

$$= \sum y^2 - 2a\sum xy - 2b\sum y + a^2\sum x^2 + 2ab\sum x + Nb^2$$

この式を、a や b の二変数関数 $f(a, b)$ として、a や b で偏微分する。
先ず、a について偏微分する。この点、

$$\frac{f(a,b)}{\partial a} = \frac{\sum y^2 - 2a\sum xy - 2b\sum y + a^2\sum x^2 + 2ab\sum x + Nb^2}{\partial a}$$

について、７５頁の微分の定義（接線の傾き）に従って変形していくことも可能である。しかし、項数が多くて計算量が多くなりそうである。そこで、以下の微分公式を利用して、上記の式を簡単に微分してしまいたい。

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

同公式は、以下のとおり、数学的帰納法により証明できる。
すなわち、*n=1* のとき、上記公式の左辺（x による微分）は、

$$\frac{d}{dx}x^n$$
$$= \frac{d}{dx}x^1$$
$$= \frac{d}{dx}x$$
$$= \lim_{\mathrm{h}\to 0}\left(\frac{(x+h)-x}{h}\right)$$
$$= \lim_{\mathrm{h}\to 0}\left(\frac{h}{h}\right)$$
$$= \lim_{\mathrm{h}\to 0}1$$
$$= 1$$

となり、上記公式の右辺は、

$$\begin{aligned} & nx^{n-1} \\ & = 1 \times x^{1-1} \\ & = x^0 \\ & = 1 \end{aligned}$$

となるので、同公式は、*n=1* のとき確かに成立する。では、*n=k* や *n=k+1* のときはどうか。

ここで、$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}$ が、仮に正しいと仮定すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^{k+1} &= \frac{d}{dx}(x \times x^k) \\ &= 1 \times x^k + x(kx^{k-1}) \\ &= x^k + kx^k \\ &= (k+1)x^k \end{aligned}$$

となり、*n=k+1* のときも正しい。[136]
すなわち、*n=k* のときに正しければ、*n=k+1* のときにも正しいと言える。そうすると、先ほど、*n=1* のときは、同公式は正しかったのであるから、*n=2* のときも正しく成立することになる。そうすると、n=2 のときも同公式は成立するので同様の理屈で、n=3 のときも同公式は成立する。以下、*n=4,5,6,7, ……* とドミノ式に同公式が成立することになる。
以上をまとめると、任意の自然数 *n=1,2,3,4,5,6,7, ……* について、同公式は成立する。（数学的帰納法による証明おわり）

---

[136] 式変形の過程で、$\frac{d}{dx}(x \times x^k) = 1 \times x^k + x(kx^{k-1})$ としたが、この変形につき、関数の積の導関数の公式 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を用いた。証明は以下のとおり。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \\ & = \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\}}{h} \\ & = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ & = \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\ & = \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\ & = g(x)\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ & = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x) \end{aligned}$$

この公式の a 版である $\frac{d}{da}a^n = na^{n-1}$ を用いると、（なお、a の項でない$\sum y^2$, $-2b\sum y$, Nb^2 は、a による微分では消えてなくなる。巻末の定義・公式索引の微分公式（定数）参照）

$$\frac{f(a,b)}{\partial a} = \frac{\sum y^2 - 2a\sum xy - 2b\sum y + a^2\sum x^2 + 2ab\sum x + Nb^2}{\partial a}$$
$$= \frac{-2a\sum xy}{\partial a} + \frac{a^2\sum x^2}{\partial a} + \frac{2ab\sum x}{\partial a}$$
$$= -2\sum xy + 2a\sum x^2 + 2b\sum x$$

となる。
これが、０に等しいと考えるのだから、

$$-2\sum xy + 2a\sum x^2 + 2b\sum x = 0$$
$$-\sum xy + a\sum x^2 + b\sum x = 0$$

が第一の式である。
次に、b について偏微分すると、

$$\frac{f(a,b)}{\partial b} = \frac{\sum y^2 - 2a\sum xy - 2b\sum y + a^2\sum x^2 + 2ab\sum x + Nb^2}{\partial b}$$
$$= -2\sum y + 2a\sum x + 2Nb$$

となる。
これが、０に等しいと考えるのだから、

$$-2\sum y + 2a\sum x + 2Nb = 0$$
$$-\sum y + a\sum x + Nb = 0$$

が第二の式である。
この第一の式と第二の式を連立方程式として解く。

$$\begin{cases} -\sum xy + a\sum x^2 + b\sum x = 0 \\ -\sum y + a\sum x + Nb = 0 \end{cases}$$

第二式を変形すると、

$$-\sum y + a\sum x + Nb = 0$$
$$Nb = \sum y - a\sum x$$
$$b = \frac{\sum y - a\sum x}{N}$$

これを、第一式に代入すると、

$$-\sum xy + a\sum x^2 + b\sum x = 0$$

$$-\sum xy + a\sum x^2 + \left(\frac{\sum y - a\sum x}{N}\right)\sum x = 0$$

$$-N\sum xy + Na\sum x^2 + (\sum y - a\sum x)\sum x = 0$$

$$-N\sum xy + Na\sum x^2 + \sum y \times \sum x - a(\sum x)^2 = 0$$

$$-N\sum xy + \sum y \times \sum x + Na\sum x^2 - a(\sum x)^2 = 0$$

$$-N\sum xy + \sum x \times \sum y + \{N\sum x^2 - (\sum x)^2\}a = 0$$

$$\{N\sum x^2 - (\sum x)^2\}a = N\sum xy - \sum x \times \sum y$$

$$a = \frac{N\sum xy - \sum x \times \sum y}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

となり、a が求められた。
この結果を、変形した第二式に代入すると、

$$b = \frac{\sum y - a\sum x}{N}$$

$$= \frac{\sum y - \left\{\frac{N\sum xy - \sum x \times \sum y}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}\right\}\sum x}{N}$$

$$= \frac{\sum y}{N} - \frac{\left\{\frac{N\sum xy - \sum x \times \sum y}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}\right\}\sum x}{N}$$

$$= \frac{\sum y}{N} - \left\{\frac{\sum xy - \frac{\sum x \times \sum y}{N}}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}\right\}\sum x$$

$$= \frac{\frac{\sum y}{N}\{N\sum x^2 - (\sum x)^2\}}{N\sum x^2 - (\sum x)^2} - \frac{\left\{\sum xy - \frac{\sum x \times \sum y}{N}\right\}\sum x}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{\frac{\sum y}{N}\{N\sum x^2 - (\sum x)^2\} - \left\{\sum xy - \frac{\sum y \times \sum x}{N}\right\}\sum x}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{\sum y \times \sum x^2 - \frac{\sum y \times (\sum x)^2}{N} - \sum xy \times \sum x + \frac{\sum y \times (\sum x)^2}{N}}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{\sum x^2 \times \sum y - \sum xy \times \sum x}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

となり、b も求められた。
ここで、式を見やすくするため、

$$\sum_{k=1}^{N} = \Sigma$$

$$x_k = x$$
$$y_k = y$$

と簡略表記していた箇所を元に戻すと、a 及び b は、以下のとおりとなる。

$$a = \frac{N\Sigma xy - \Sigma x \times \Sigma y}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$
$$= \frac{N\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - \sum_{k=1}^{N} x_k \times \sum_{k=1}^{N} y_k}{N\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - (\sum_{k=1}^{N} x_k)^2}$$

$$b = \frac{\Sigma x^2 \times \Sigma y - \Sigma xy \times \Sigma x}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$
$$= \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k^2 \times \sum_{k=1}^{N} y_k - \sum_{k=1}^{N} x_k y_k \times \sum_{k=1}^{N} x_k}{N\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - (\sum_{k=1}^{N} x_k)^2}$$

この a が、必要なβ値である。

・過去データ y … $Ri - Rf$
・過去データ x … $Rm - Rf$

であることを踏まえると（以下、表記を見やすくするため、r_i, r_f, r_m を Ri, Rf, Rm と大きく表記する）、上記 a 式は、β値の一般式として書き換えられる。すなわち、

$$\beta = \frac{N\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - \sum_{k=1}^{N} x_k \times \sum_{k=1}^{N} y_k}{N\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - (\sum_{k=1}^{N} x_k)^2}$$
$$= \frac{N\sum_{k=1}^{N}(Rm - Rf)_k (Ri - Rf)_k - \sum_{k=1}^{N}(Rm - Rf)_k \times \sum_{k=1}^{N}(Ri - Rf)_k}{N\sum_{k=1}^{N}(Rm - Rf)_k^2 - \{\sum_{k=1}^{N}(Rm - Rf)_k\}^2}$$

となる。
一見すると、かえって複雑になったように見えるが、式の要素をみると、

・N … データの個数
・$Rm - Rf$ … マーケット・リスク・プレミアム。Rm は TOPIX 変動率から計算可能。Rf は国債利回り。
・$Ri - Rf$ … Ri は株価変動率から計算可能。Rf は国債利回り。

であり、いずれも容易にインプット可能な項目である。

２０　トヨタ自動車のβ値

β値を Excel で実際に求めてみる。例えば、トヨタ自動車株式会社の株価と TOPIX のデータ（平成２９年正月から１１月初めまでの１０か月分。約２００件のデータ）を入力する（下記 Excel 表の①、②)。そして、前述した「１５　β 値の導出（概論)」の要領で、トヨタ及び TOPIX の変動率（収益率）を求める（③、④)。リスク・フリー・レートは、１０年もの日本国債の年率０．０６％（＝日率０．０００１６４... ％）とし、③と④から各々控除し、$R_i - R_f$ と$R_m - R_f$ を求める（⑥、⑦)。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
日付	トヨタ終値	TOPIX 終値	トヨタ収益率	TOPIX 収益率	国債年利回／365	Ri-Rf	Rm-Rf
2017/11/2	7,155	1794	1.66%	0.41%	0.00016%	1.66%	0.41%
2017/11/1	7,038	1787	0.69%	1.17%	0.00016%	0.69%	1.17%
2017/10/31	6,990	1766	-1.23%	-0.28%	0.00016%	-1.23%	-0.28%
2017/10/30	7,077	1771	0.06%	-0.01%	0.00016%	0.06%	-0.01%
2017/1/10	6,861	1542	-1.00%	-0.71%	0.00016%	-1.00%	-0.71%
2017/1/6	6,930	1553	-1.69%	-0.15%	0.00016%	-1.69%	-0.15%
2017/1/5	7,049	1556	-0.68%	0.08%	0.00016%	-0.68%	0.08%
2017/1/4	7,097	1554					

ここから先の計算は、(原理的には同じことであるが)、複数の手法がある。

第１に、前項で導出したβ値の一般式を Excel で再現する場合の計算を考える。

$$\beta = \frac{N\sum_{k=1}^{N}(Rm-Rf)_k(Ri-Rf)_k - \sum_{k=1}^{N}(Rm-Rf)_k \times \sum_{k=1}^{N}(Ri-Rf)_k}{N\sum_{k=1}^{N}(Rm-Rf)_k^2 - \{\sum_{k=1}^{N}(Rm-Rf)_k\}^2}$$

において、

・N　　　…　データの個数　→２０７個

・$Rm-Rf$　…　上記 Excel 表の⑦欄の数値

・$Ri-Rf$　　…　上記 Excel 表の⑥欄の数値

を反映させると、

$$= \frac{207\sum_{k=1}^{207} ⑦_k⑥_k - \sum_{k=1}^{207}⑦_k \times \sum_{k=1}^{207}⑥_k}{207\sum_{k=1}^{207}⑦_k^2 - \{\sum_{k=1}^{207}⑦_k\}^2}$$

$$= \frac{207 \times \{(⑦ \times ⑥)\text{を縦合計}\} - ⑦\text{を縦合計} \times ⑥\text{を縦合計}}{207 \times (⑦\text{を 2 乗したものを縦合計}) - ⑦\text{を縦合計したものを 2 乗}}$$

となるので、そのような Excel を組めばよい。[137]

	①	②	③	④	⑥	⑦		
日付	トヨタ終値	TOPIX 終値	トヨタ収益率	TOPIX 収益率	Ri-Rf	Rm-Rf	⑦×⑥	⑦の二乗
2017/11/2	7,155	1794	1.66%	0.41%	1.66%	0.41%	0.007%	0.002%
2017/11/1	7,038	1787	0.69%	1.17%	0.69%	1.17%	0.008%	0.014%
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2017/1/5	7,049	1556	-0.68%	0.08%	-0.68%	0.08%	-0.001%	0.000%
2017/1/4	7,097	1554						

縦合計	1.90%	14.76%	1.06%	0.92%
データ個数			207	207
縦合計×データ数			2.198	1.913
データ個数×｛（⑦×⑥）を縦合計｝				2.198
⑦縦合計×⑥縦合計				0.003
分子				2.195
データ個数×（⑦を2乗したものを縦合計）				1.913
⑦を縦合計したものを2乗				0.022
分母				1.891
β値				1.1608

実際にそのようにして計算してみると、

$$= \frac{207 \times 1.06\% - 14.76\% \times 1.90\%}{207 \times 0.92\% - (14.76\%)^2}$$

$$= \frac{207 \times \frac{1.06}{100} - \frac{14.76}{100} \times \frac{1.90}{100}}{207 \times \frac{0.92}{100} - \left(\frac{14.76}{100}\right)^2}$$

$$= \frac{2.198 + 0.003}{1.913 - 0.022}$$

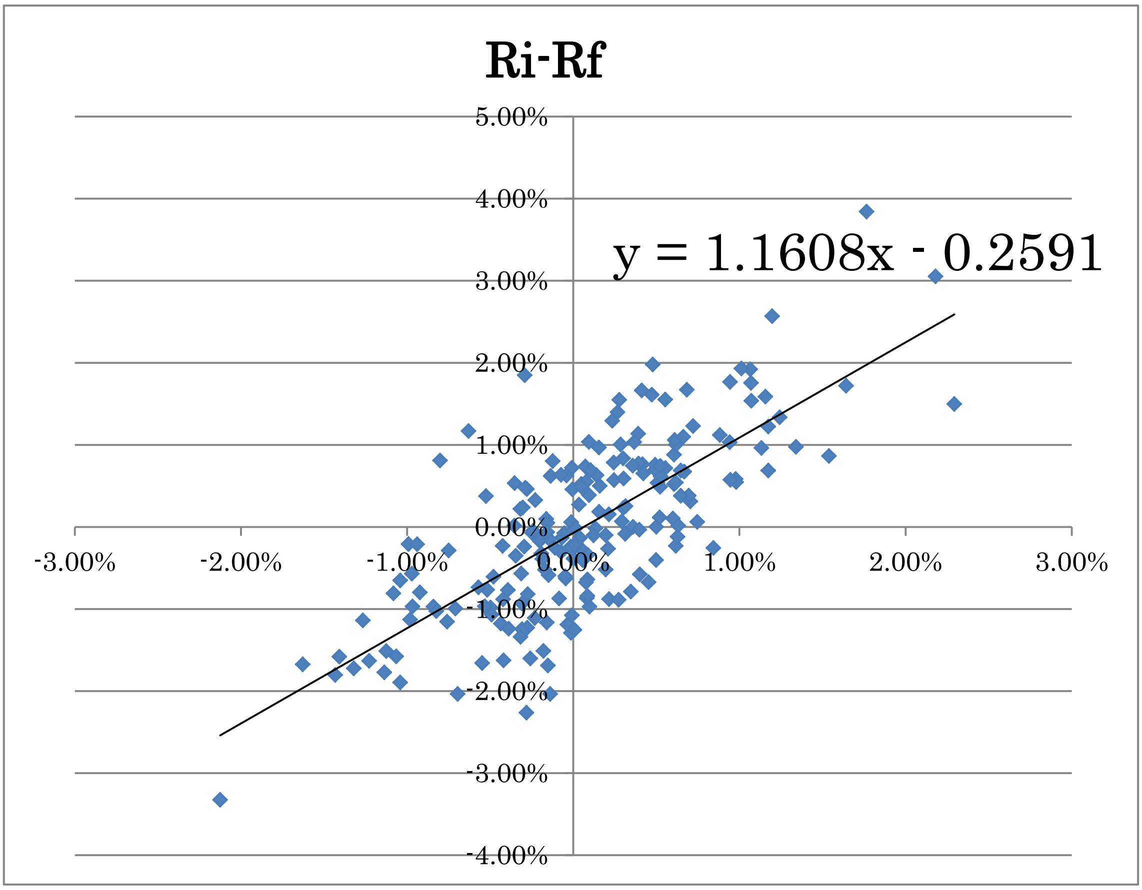
$$= \frac{2.195}{1.891}$$

$$= 1.1608 \ldots$$

となる。

[137] 本書の Excel 数値や本文中数式の表記は、演算結果を四捨五入して表記している。例えば、⑦×⑥の縦合計１．０６％は、実際は、１．０６１８６２４４６．．．％である。

　第２に、グラフで散布図を描き、近似曲線を描画する方式もある。上記 Excel 表の⑥と⑦の列を範囲選択し、「１５　β値の導出（概論）」の要領で、「散布図グラフ」を作成したうえで、線形近似直線を Excel に作成させる。すると、以下のとおり、トヨタ自動車のβ値は、１．１６０８であると推定された。



ちなみに、２０１７年１１月６日付の日本経済新聞Web版では、推計期間を３年とり、トヨタ自動車株式会社のβ値を１．１５と公表している。

（１００頁の図版は本抄録版では割愛した）

同 Web 版では、同業他社のβ値も掲載されている。同業他社のβ値平均と個別対象企業のβ値の算定結果を比べてみることは、個別対象企業のβ値の算定過程に計算間違いがないかを確認する点でも、有益である。[138]

なお、同日のロイターでは、トヨタ自動車株式会社のβ値を１．１３と公表している。推計期間その他の採用するパラメータが異なるのであろう。[139]　このように同じ会社の同じ時期のβ値であっても、評価前提により数値は異なり得る。

---

138 日本の上場企業の実際のβ値の分布状況については、参考文献Ｄ２６９～２７０頁に一覧表とグラフがある。

139 β提供サービスでは、計算で得られたβ値を全企業の平均に近づくように微調整（スムージング）している場合がある。参考文献Ａ上巻の３４７頁

２１　β 値の一般解（平方完成）

偏微分によらず、一般解も平方完成で求めることが可能である。回帰式 $y = ax + b$ と実測値 (x_i, y_i) との誤差を二乗したものを全部足したものは、以下のとおりであった。[140]

$$\sum_{k=1}^{N}\{y_k - (ax_k + b)\}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{N} y_k^2 - 2\,a\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - 2b\sum_{k=1}^{N} y_k + a^2\sum_{k=1}^{N} x_k^2 + 2ab\sum_{k=1}^{N} x_k + Nb^2$$

平方完成の手法で、上記式が最小値をとる場合（すなわち実測値との誤差[141]が最小となる場合）の条件（具体的には回帰式の傾き a すなわち事業評価で用いるβ）を求める。先ずは b について平方完成してみる。[142]

$$\begin{aligned}
&= \sum y^2 - 2a\sum xy - 2b\sum y + a^2\sum x^2 + 2ab\sum x + Nb^2\\
&= Nb^2 + 2ab\sum x - 2b\sum y + a^2\sum x^2 - 2a\sum xy + \sum y^2\\
&= Nb^2 + 2b(a\sum x - \sum y) + a^2\sum x^2 - 2a\sum xy + \sum y^2\\
&= N\left\{b^2 + \frac{2b}{N}(a\sum x - \sum y)\right\} + a^2\sum x^2 - 2a\sum xy + \sum y^2\\
&= N\left\{b^2 + \frac{2b}{N}(a\sum x - \sum y) + \left(\frac{a\sum x - \sum y}{N}\right)^2 - \left(\frac{a\sum x - \sum y}{N}\right)^2\right\} + a^2\sum x^2 - 2a\sum xy + \sum y^2\\
&= N\left\{b^2 + \frac{2b}{N}(a\sum x - \sum y) + \left(\frac{a\sum x - \sum y}{N}\right)^2\right\} - N\left(\frac{a\sum x - \sum y}{N}\right)^2 + a^2\sum x^2 - 2a\sum xy + \sum y^2\\
&= N\left(b + \frac{a\sum x - \sum y}{N}\right)^2 - \frac{(a\sum x - \sum y)^2}{N} + a^2\sum x^2 - 2a\sum xy + \sum y^2
\end{aligned}$$

---

[140] 本書９１頁

[141] 実測値との誤差（二乗で拡大したもの）の和は、本書７１頁の立体グラフでいえば、曲面の各地点における高さに相当する。すなわち、同立体グラフは、誤差の大きさを実感しやすいように、等高線で表示したグラフである。

[142] 式を見やすくするために、以下のとおり、簡略表記をする。

$$\sum_{k=1}^{N} \quad = \sum$$

$$x_k = x$$

$$y_k = y$$

与式の末業のかたちを見ると、初項のうち、N はデータ数であり正の数である。また、諸侯のうち、(　)^2　の部分は、(　) 内の数値が実数であるから０以上である。よって、同（　）内の数値が０になるとき、すなわち、

$$b+\frac{a\sum x-\sum y}{N}=0$$

であるとき、初項は０となり、与式全体は以下の最小値をとる。

$$-\frac{(a\sum x-\sum y)^2}{N}+a^2\sum x^2-2a\sum xy+\sum y^2$$

次に、上記の最小値をみると、変数 a によって値がかわるようである。そこで、この最小値を求めるべく（最小の中の最小）、この残された a の式を更に平方完成してみると、

$$\begin{aligned}
&-\frac{(a\sum x-\sum y)^2}{N}+a^2\sum x^2-2a\sum xy+\sum y^2\\
&=-\frac{(a\sum x)^2-2a\sum x\sum y+(\sum y)^2}{N}+a^2\sum x^2-2a\sum xy+\sum y^2\\
&=\frac{-(a\sum x)^2+2a\sum x\sum y-(\sum y)^2}{N}+\frac{Na^2\sum x^2}{N}-\frac{N2a\sum xy}{N}+\sum y^2\\
&=\frac{Na^2\sum x^2-(a\sum x)^2+2a\sum x\sum y-N2a\sum xy}{N}-\frac{(\sum y)^2}{N}+\sum y^2\\
&=\frac{a^2N\sum x^2-a^2(\sum x)^2+2a\sum x\sum y-2aN\sum xy}{N}-\frac{(\sum y)^2}{N}+\sum y^2\\
&=\frac{\{N\sum x^2-(\sum x)^2\}a^2+2a\sum x\sum y-2aN\sum xy}{N}-\frac{(\sum y)^2}{N}+\sum y^2\\
&=\frac{\{N\sum x^2-(\sum x)^2\}\left\{a^2+\frac{2a\sum x\sum y-2aN\sum xy}{N\sum x^2-(\sum x)^2}\right\}}{N}-\frac{(\sum y)^2}{N}+\sum y^2\\
&=\frac{N\sum x^2-(\sum x)^2}{N}\left\{a^2+\frac{2a(\sum x\sum y-N\sum xy)}{N\sum x^2-(\sum x)^2}\right\}-\frac{(\sum y)^2}{N}+\sum y^2\\
&=\frac{N\sum x^2-(\sum x)^2}{N}\left\{a^2+\frac{2a(\sum x\sum y-N\sum xy)}{N\sum x^2-(\sum x)^2}+\left\{\frac{\sum x\sum y-N\sum xy}{N\sum x^2-(\sum x)^2}\right\}^2-\left\{\frac{\sum x\sum y-N\sum xy}{N\sum x^2-(\sum x)^2}\right\}^2\right\}\\
&\qquad-\frac{(\sum y)^2}{N}+\sum y^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{N\sum x^2 - (\sum x)^2}{N}\left\{a^2 + \frac{2a(\sum x\sum y - N\sum xy)}{N\sum x^2 - (\sum x)^2} + \left\{\frac{\sum x\sum y - N\sum xy}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}\right\}^2\right\} \\
&\qquad\qquad - \frac{N\sum x^2 - (\sum x)^2}{N}\left\{\frac{\sum x\sum y - N\sum xy}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}\right\}^2 - \frac{(\sum y)^2}{N} + \sum y^2 \\
&= \frac{N\sum x^2 - (\sum x)^2}{N}\left\{a + \frac{\sum x\sum y - N\sum xy}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}\right\}^2 - \frac{N\sum x^2 - (\sum x)^2}{N}\left\{\frac{\sum x\sum y - N\sum xy}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}\right\}^2 - \frac{(\sum y)^2}{N} + \sum y^2
\end{aligned}
$$

となる。

これは、a が、以下の条件を満たすときに、最小値をとることを示している。

$$
a + \frac{\sum x\sum y - N\sum xy}{N\sum x^2 - (\sum x)^2} = 0
$$

よって、以下の二つの条件、

$$
\begin{cases}
a + \dfrac{\sum x\sum y - N\sum xy}{N\sum x^2 - (\sum x)^2} = 0 \\
\qquad b + \dfrac{a\sum x - \sum y}{N} = 0
\end{cases}
$$

を a と b について解いた [143]

$$
\begin{cases}
a = \dfrac{N\sum xy - \sum x\sum y}{N\sum x^2 - (\sum x)^2} \\
b = \dfrac{\sum x^2\sum y - \sum xy\sum x}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}
\end{cases}
$$

のときに、[144] 与式である

$$
\sum_{k=1}^{N}\{y_k - (ax_k + b)\}^2
$$

は最小値をとる（すなわち、実測データ (x_i, y_i) と回帰式 $y = ax + b$ との誤差二乗和が最も小さくなる）。これは、偏微分を用いて a と b とを求めた結果と一致している。

[143] a の解を第２式（b の式）に代入した以降の解法手順は、９５頁と同じ。

[144] PLUTUS＋ MEMBER'S REPORT（No.62）「株価分析の一手法としての回帰分析」の「補論 回帰分析の概要」(May 29, 2015)では、この代数学的な表現式で紹介がある。

２２　β 値の一般解（分散、平均値）

以上の検討から、[145]　β 値の一般式は、

$$a = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

において、

$$(x, y) = (Rm - Rf, Ri - Rf)$$

とおいた式、すなわち、

$$\beta = \frac{N\sum_{k=1}^{N}(Rm - Rf)_k(Ri - Rf)_k - \sum_{k=1}^{N}(Rm - Rf)_k \times \sum_{k=1}^{N}(Ri - Rf)_k}{N\sum_{k=1}^{N}(Rm - Rf)_k^2 - \{\sum_{k=1}^{N}(Rm - Rf)_k\}^2}$$

であることが確認された。

勿論、この式でも計算は可能であるが、[146]　いかにも代数学的な要素数の多い式である。もう少し簡単な形式にならないだろうか。巷の啓蒙書には、（数式証明は省略されていて数学的根拠は不明ながらも）、記憶しやすい短い公式（Cov や σ 等といった記号を用いたもの）が載っていたように思う。

過去データ (x_i, y_i) をもとに、$y = ax + b$ の形の回帰式における傾き a 及び切片 b を求める連立方程式は、以下のとおりであった。[147]　この式からの簡素化を、以下、試みてみる。

$$\begin{cases} -\sum xy + a\sum x^2 + b\sum x = 0 \\ \quad -\sum y + a\sum x + Nb = 0 \end{cases}$$

ここで、合計で N 個ある x の組すなわち　$x_i = \{x_1, x_2, x_3, \dots x_N\}$ の平均値を、

$$\overline{x}$$

と表現する。平均値は、上記 $x_1, x_2, x_3, \dots x_N$ を全部足していき、合計値を個数で割った値である。よって、合計値である

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N$$

[145] 偏微分を用いる場合につき「１９　β 値の一般解（最小二乗法）」、平方完成を用いる場合につき「２１　β 値の一般解（平方完成）」
[146] 計算実例として、「２０　トヨタ自動車の β 値」
[147] 本書９４頁

を個数 N で割れば、平均値となるから、

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N}$$

である。
これを簡略表記して、

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{N}$$

とする。
両辺に N を乗ずると、

$$N\overline{x} = \sum x$$

である。[148]
同様に、y についても、

$$\overline{y} = \frac{\sum y}{N}$$

$$N\overline{y} = \sum y$$

となる。これを上記連立方程式の一部に各々代入すると、第１式は、

$$-\sum xy + a\sum x^2 + b\sum x = 0$$
$$-\sum xy + a\sum x^2 + bN\overline{x} = 0$$
$$a\sum x^2 + bN\overline{x} = \sum xy$$

となり、第２式は、

$$-\sum y + a\sum x + Nb = 0$$
$$-N\overline{y} + aN\overline{x} + Nb = 0$$

となる。[149]
この第２式に $\overline{x}$ を掛けて、

[148] 例えば x_i が{３，５，５，３}の四個からなる数列のとき、左辺（四個×平均値４）と右辺（３＋５＋５＋３）とが共に１６で等しいことを意味している。

[149] この式を変形すれば、b を、平均値と a から求める式も導出できる。

$$-N\overline{y} + aN\overline{x} + Nb = 0$$
$$-\overline{y} + a\overline{x} + b = 0$$
$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

（もっとも、傾き a＝企業価値算定のためのβ値のみを求めるのが主目的であれば、あえて b の計算を更に続行する必要はない）

$$
\begin{aligned}
-N\bar{y} \times \bar{x} + aN\bar{x} \times \bar{x} + Nb\bar{x} &= 0 \\
-N\bar{y} \times \bar{x} + aN\bar{x}^2 + Nb\bar{x} &= 0 \\
aN\bar{x}^2 + Nb\bar{x} &= N\bar{y} \times \bar{x}
\end{aligned}
$$

としたうえで、上記変形後の第１式（$a\sum x^2 + bN\bar{x} = \sum xy$）の両辺から引くと、

$$
\begin{aligned}
a\sum x^2 + bN\bar{x} - \left(aN\bar{x}^2 + Nb\bar{x}\right) &= \sum xy - N\bar{y} \times \bar{x} \\
a\sum x^2 + bN\bar{x} - aN\bar{x}^2 - Nb\bar{x} &= \sum xy - N\bar{x} \times \bar{y} \\
a\sum x^2 - aN\bar{x}^2 &= \sum xy - N\bar{x} \times \bar{y} \\
a(\sum x^2 - N\bar{x}^2) &= \sum xy - N\bar{x} \times \bar{y} \\
a &= \frac{\sum xy - N\bar{x} \times \bar{y}}{\sum x^2 - N\bar{x}^2}
\end{aligned}
$$

となり、平均値$\bar{x}$ や$\bar{y}$ を用いて、a が求められる式になった。ここで、簡略表記たる

$$
\sum_{k=1}^{N} = \Sigma
$$

$$
x_k = x
$$

$$
y_k = y
$$

を元に戻すと、a は、以下のとおりとなる。

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\sum xy - N\bar{x} \times \bar{y}}{\sum x^2 - N\bar{x}^2} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - N\bar{x} \times \bar{y}}{\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - N\bar{x}^2}
\end{aligned}
$$

上記式を、統計で使われる概念（分散、共分散）を用いて圧縮表記してみる。先ず、分散から始める。

xの分散を σ_x^2 とすると、[150] 分散は次のように定義されている。[151] [152]

$$
\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2
$$

[150] σ は、シグマと呼称する。下添え字 x は、変数 x に関する σ であることを示すもので、σとあわせて一文字であり、乗算の趣旨ではない。他方で、上添え字の 2 は累乗を示す。ちなみに累乗のないσ は標準偏差を指す文字として使用される。

[151] 分散σ^2 とは、その名のとおり、ばらつきを示す指標である。

[152] 分散σ^2 は、Excel では、VARP 関数（VAR.P 関数）で計算することもできる。

これから、この分散σ_x^2の式を展開していって、最終的に、上記aの式を表す一部にする予定である。しかし、分散が、なにゆえに上記のような形で定義されているのか整理をしておかないと、ただ単に式変形をした結果、偶然に簡略表記できただけということになってしまい、納得感がない。そこで、分散が上記式のように定義されたいきさつを簡単に述べる。

分散は、データのばらつき度を測るための指標である。ばらつき度を測る方法としては、例えば、データの最大値と最小値との差を出すという方式も考えられるが、このような差だけで、ばらつきを測ると、ごく少数の最大値等によりばらつき度が大きく左右されることになり適切ではない。そこで、分散では、以下のようなアイディアを採用した。

分散では、先ず、式の形から明らかなように、各データ値x_kと平均値$\overline{x}$との差、すなわち乖離幅のようなもの。偏差という）に着目した。偏差は、以下の式で表される。

$$x_k - \overline{x}$$

そのうえで、これを２乗に拡大している。なぜ、２乗にするかということであるが、これは偏差をプラスに揃えるためである。つまり、この後、各偏差を、$x_1 - \overline{x}$ から $x_N - \overline{x}$ までＮ個全部の合計をするが、その際、偏差には、もともとはプラスの差もあればマイナスの差もあり得るため、そのまま足してしまうと、プラスとマイナスの影響が相殺しあって合計値が０になってしまうという問題がある。これでは、ばらつき度測定をしたことにならない。そこで、２乗してプラスに揃えるのである。この点、わざわざ２乗しなくても、絶対値を用いれば良いという考えもあるが、正と負とで場合分けをするのが面倒である。２乗しておいても、あとで必要に応じて、√処理をすれば元の大きさにもどるから、この方法（２乗して足す）でも構わない。以上の次第で、上記偏差を２乗してみる。

$$(x_k - \overline{x})^2$$

これは、あくまで個別データ１個分の偏差（の２乗拡大値）である。統計データ全体のばらつき度を知りたいのであるから、全データを合計する必要がある。それを数式で示すと、以下のとおりとなる。

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k - \overline{x})^2$$

これは、kを１、２、３、…Nと変化させていき、ひとつひとつの数値を全部合計するという意味である。すなわち、上記式は以下の意味である。

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k - \overline{x})^2 = (x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_N - \overline{x})^2$$

これで、全データについて合計したもの（すなわち乖離幅の全体量）が出た。しかし、ひとつ問題がある。この数値の構造上、データ個数が多いほど数値が大きくなくってしまうのである。例えば、１００個の統計データのばらつき度と１００万個の統計データのばらつき度の比較をしようとすると、常識的に考えて、積算結果は個数に依拠するから、後者の方が大きくなってしまう。これでは、ばらつき度測定のための指標として、いまひとつである。そこで、最後にデータ個数 N で割ることにした。[153]

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2$$

これで、無事にデータのばらつき度を比較するための指標となった。分散のマークが、分散σ^2 というふうに累乗記号がついているのは、以上のように、２乗した数値を使っているからである。ばらつき度の大小を比べるだけであれば２乗したままでも十分に用を足すので、このまま用いられている。（２乗に拡大されたままでは、実像と比べて大きすぎて適切でないという場合には、$\sqrt{\ }$をつけて、累乗がない形にしてもよい。それが、標準偏差 σ である。）

このように、分散σ^2 は、もともと、データ個数の大小に左右されない乖離幅の積算値を示すもので、統計データのばらつき傾向を他の統計データと比較参照するための指標である。この分散σ^2 は、βを求める式の分母に用いることができる。すなわち、この分散 σ_x^2 は、平均値 $\overline{x}$ を定数とみれば、Σ演算規則に従い（巻末の定義・公式索引を参照）、次のように展開し・整理できる（なお、Σを外すにあたり、１０６頁の $N\overline{x}=\sum x$ を用いた）。

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k^2-2x_k\overline{x}+\overline{x}^2\right)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k^2-\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k\overline{x}+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{x}^2$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k^2-\frac{2\overline{x}}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k+\frac{1}{N}N\overline{x}^2$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k^2-\frac{2\overline{x}}{N}N\overline{x}+\overline{x}^2$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k^2-2\overline{x}^2+\overline{x}^2$$

[153] N でなく $N-1$ で割るべき場面もあるが、今回は母集団全データの分散を扱うので、N で割ればよい。

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k^2-\overline{x}^2$$

$$=\frac{1}{N}N\overline{x_i^2}-\overline{x}^2$$
$$=\overline{x_i^2}-\overline{x}^2$$

すなわち、二乗値の平均と、平均値の二乗との差に変形できる。[154] [155]

$$\sigma_x^2=\overline{x_i^2}-\overline{x}^2$$

これを前提すると、上記の a に関する代数学的な記述式（$a=\frac{\sum_{k=1}^{N}x_k y_k-N\overline{x}\times\overline{y}}{\sum_{k=1}^{N}x_k^2-N\overline{x}^2}$）の分母は、以下のとおり、分散 σ_x^2 を使って簡単に表記できる。

$$\sum_{k=1}^{N}x_k^2-N\overline{x}^2=N\overline{x_i^2}-N\overline{x}^2$$

$$=N(\overline{x_i^2}-\overline{x}^2)$$
$$=N\sigma_x^2$$

このように分散概念により、式が簡易化されることの意味を考えてみる。
CAPM では、

$$r_i-r_f=\beta(r_m-r_f)$$

すなわち、

$$\frac{r_i-r_f}{r_m-r_f}=\beta$$

として、βを求める式の分母は、r_m-r_f を想定している。この r_m-r_f は、その時々の経済情勢により拡大・縮小変動する。その変動幅は小さいことが多いであろうが、まれには変動幅が大きくなる。すなわち、自然界における分散（ばらつき度）の傾向（具体的には釣り鐘状の正規分布）を示すと想定される。それゆえ、βを示す式の分母が分散 σ_x^2 に置き換わることも不自然ではない（なお、分散が２乗であるのに対して、r_m-r_f は２乗ではないが、これから検討する分子部分も共分散が２乗構造を内包するので乗数格差は解消される）。

---

154 この式の $\overline{x_i^2}$ は、x_i の各要素を二乗し平均したものを指す。例えば x_i が{３、５、４}の三個からなす数列であれば、$\frac{3^2+5^2+4^2}{3}=\frac{9+25+16}{3}=\frac{50}{3}=16.66666\ldots$ である。

155 この式の $\overline{x}^2$ は、x_i の各要素の平均値すなわち $\overline{x}$ を二乗したものを指す。前注と同じ設例であれば、$\left(\frac{3+5+4}{3}\right)^2=\left(\frac{12}{3}\right)^2=4^2=16$ である。

次に、x, y の共分散をσ_{xy} とする。[156]
共分散の定義は、以下のとおりである。

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$$

先ほどの分散と式の形は似ているが、共分散と分散の定義は、一部が異なる。分散ではxの偏差（$x_k - \overline{x}$）に同じ x の偏差（$x_k - \overline{x}$）をかけていた。共分散ではy の偏差（$y_k - \overline{y}$）をかける。共分散は、x, y 間にある正／負の相関関係を見るための指標なので、このようにするのである。なお、共分散のマーク σ は二乗マークがないが、その定義にあるとおり、x, y 両要素を掛け合わせているので、次元としては、σ_x^2 と同じである。この共分散の定義式は、平均値 $\overline{x}$ や $\overline{y}$ を定数とみれば、Σ演算規則に従い、以下のように整理できる。

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k y_k - x_k\overline{y} - \overline{x}y_k + \overline{x}\times\overline{y})$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}x_k y_k - \sum_{k=1}^{N}x_k\overline{y} - \sum_{k=1}^{N}\overline{x}y_k + \sum_{k=1}^{N}\overline{x}\times\overline{y}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}x_k y_k - \overline{y}\sum_{k=1}^{N}x_k - \overline{x}\sum_{k=1}^{N}y_k + N\overline{x}\times\overline{y}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}x_k y_k - \overline{y}N\overline{x} - \overline{x}N\overline{y} + N\overline{x}\times\overline{y}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}x_k y_k - N\overline{x}\times\overline{y} - N\overline{x}\times\overline{y} + N\overline{x}\times\overline{y}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}x_k y_k - N\,\overline{x}\times\overline{y}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k y_k - \frac{N\overline{x}\times\overline{y}}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k y_k - \overline{x}\times\overline{y}$$

[156] 下添え字 xy は、変数 x, y の両者に関する σ であることを示すもので、σとあわせて一文字であり、乗算の趣旨ではない。

これを踏まえると、上記の a に関する式（$a=\frac{\sum_{k=1}^{N}x_k y_k-N\overline{x}\times\overline{y}}{\sum_{k=1}^{N}x_k^2-N\overline{x}^2}$）の分子は、以下のとおり、表記できる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}x_k y_k-N\overline{x}\times\overline{y} &= \frac{N}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k y_k-N\overline{x}\times\overline{y} \\
&= N\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k y_k-\overline{x}\times\overline{y}\right) \\
&= N\sigma_{xy}
\end{aligned}
$$

したがって、上記の a に関する式（$a=\frac{\sum_{k=1}^{N}x_k y_k-N\overline{x}\times\overline{y}}{\sum_{k=1}^{N}x_k^2-N\overline{x}^2}$）は、分散 σ_x^2 と共分散σ_{xy} の概念を用いれば、以下のとおり、統計学的な記述様式で、簡略に表記できる。[157]

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{N\sigma_{xy}}{N\sigma_x^2} \\
&= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}
\end{aligned}
$$

この式の a が、事業価値評価の場面で用いるβ値である。[158]

随分と簡単な式になったのは良いが、この式が示すイメージが不明かもしれない。そこで、β値と上記 a とを比較してみる。β値は、イメージとしては、

$$\beta=\frac{\text{個別株式の変動率}}{\text{東証株式指数の変動率}}$$

という分数である。この a も、分子にx,y 要素・分母にx^2 要素という構造をしており、(両者の共通要素である x で通分すれば、分子にy 要素・分母にx要素という構造に見えなくもないから)、結局、分数全体としては、以下のようなイメージを示している。

157 参考文献Ｂの１８３頁の注３３では、この σ を用いた公式について、分散ポートフォリオへの貢献という観点から整理している。この視点からの定義方法については、本書では、「２３　CAPM モデルの論証」で扱う。

158 参考文献Ｄ２４２頁では、分母を掛け算表記にした、以下の公式で紹介している。

$$\beta=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\times\sigma_x}$$

$$a = \frac{\text{個別株式の乖離度合い}}{\text{東証株式指数の乖離度合い}}$$

変動率も乖離度合いも、似たようなものであると考えれば、

$$\beta = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

がβの定義であるとしても良い。実際、そのような定義から出発している文献も多い。[159]
なお、この統計的な表現式については、内容としては同じであるが、他の表現形式もある。すなわち、

共分散σ_{xy} … $Cov(x, y)$

と表現する流派もあり、それに従うと、傾き a は、以下のとおりの表現となる。

$$a = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x^2}$$

このほか、新たな統計上の概念として、相関係数 ρ として、

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

を定義すると、βは、次のようにも変形して表現することもできる。

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_x} \\ &= \frac{\sigma_{xy}\sigma_y}{\sigma_x \sigma_x \sigma_y} \\ &= \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \end{aligned}$$

これは、日本語で表現すれば、以下の意味である。

[159] 本書では、散布図→誤差の少ない直線の傾き→誤差最小となるよう数学的処理（偏微分や平方完成）という、長いロジックを経由して、上記β式に到達したわけであるが、上記分数イメージ論（共分散／分散）で素朴な納得感が得られるのであれば、数式上の結論は同じことであるので、そのような統計用語で、βを定義しても構わない。

$$\beta = 相関係数 \times \frac{個別株式変動率の標準偏差}{東証株式指数変動率の標準偏差}$$

このほか、Excel で、分散を VARP 関数で求め、共分散を COVAR 関数で求めることから、上記式　$\beta = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$　について、関数名をそのまま使って、以下のように記載してしまうことも直截なやり方である。[160]

$$\beta = \frac{COVAR(\quad)}{VARP(\quad)}$$

これら統計学的語句を用いて指し示す思想内容は、いずれも上記の代数学的な記載手法と同じである。もっとも、このような表記は、見た目はシンプルであるが、実際に(x, y) の大量データから a を計算する観点からは、代入数値が一見して明らかでないという問題がある。公式自体に入力対象データを指し示す表記があったほうが、ユーザー・フレンドリーである。つまり、公式内に、(x, y) の文字を用いた公式の方が、理解しやすい。

そこで、上記 a にかかる式を、分散と共分散の定義に従って、変換しておく。

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})}{\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2} \end{aligned}$$

このように、各データ(x, y) とそれから容易に導かれる平均値 $\overline{x}$ 、$\overline{y}$ を使って、a（＝β値）が計算できる式を得た。この式も、最小二乗法の一般解として、よく啓蒙書等に記載されている形の式である。この式は、各データ (x_i, y_i) と平均値 $\overline{x}$ 、$\overline{y}$ を用いて、四則演算で解を得られることから、（計算量は膨大であることに変わりはないが）手作業での計算にも馴染みやすい。

下記の流れ図は、この各データ (x_i, y_i) と平均値 $\overline{x}$ 、$\overline{y}$ を用いた上記の最後の公式に従い、誤差を最小とする回帰直線の傾き a（＝β値）を求める際の具体的手順である。流れ図における過去データ(x, y) には、

---

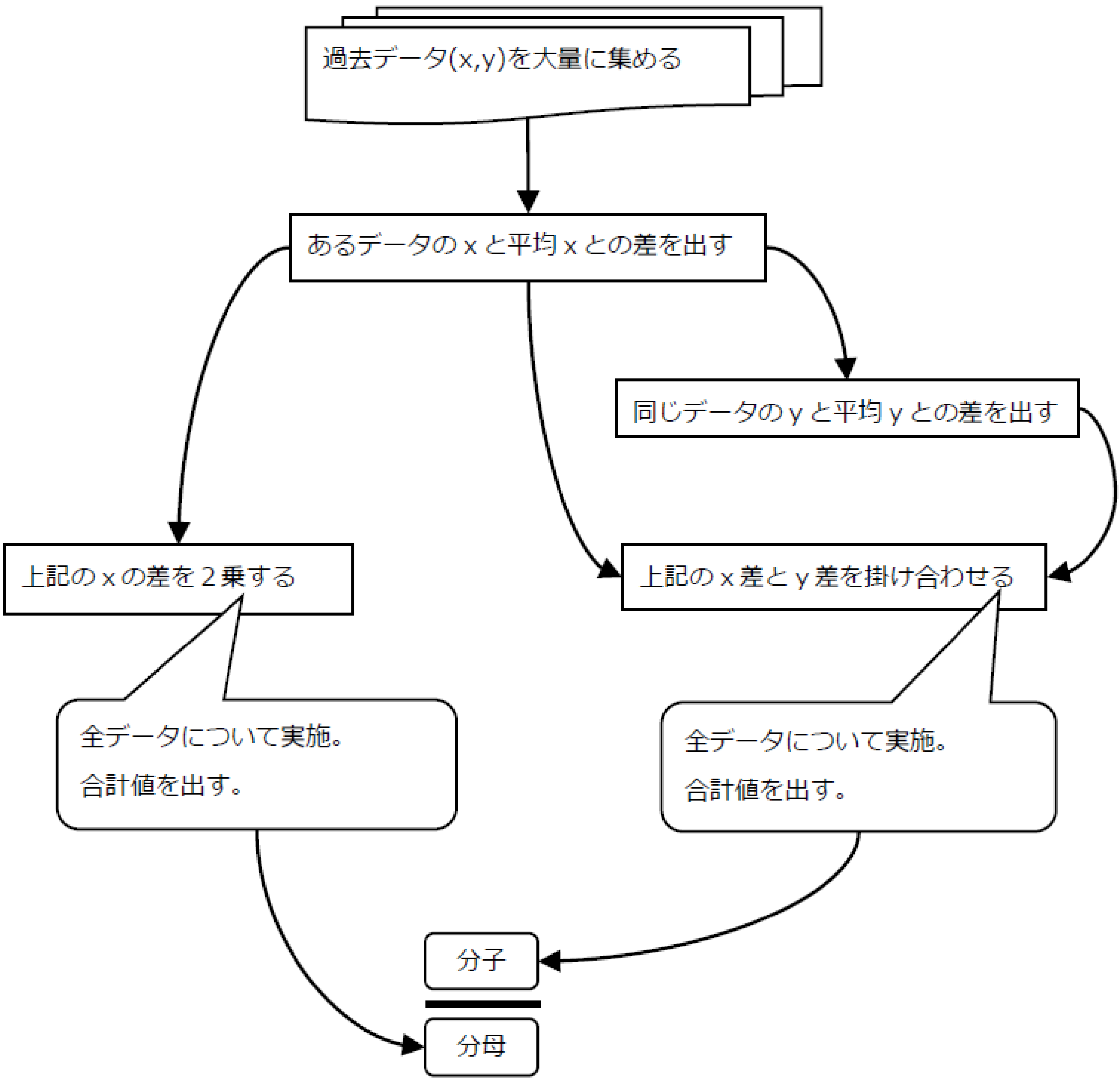
[160] 括弧内には、引数（各関数が受け取るべき入力値）が入る。

・過去の TOPIX 変動率（r_m）
・対象株式変動率（r_i）
・日本国債利回り（r_f）

を基にして、

$$(x, y) = (r_m - r_f, r_i - r_f)$$

のとおりに代入したデータを用いれば、求める a が計算できる筈である。



以上のとおり、計算手順が明確化されたので、手作業による計算はやめにして、自動処理により、a を計算してしまいたい。この点、例えば、対応するプログラムを書いて実行させれば、データ (x_i, y_i) を随時読み取って、対応する平均値　→差分　→乗算値　→乗算値合算値　→a を自動的に計算させることが可能である。

後述の「２４　β 値の Excel 計算」では、この演算過程を可視化し、第三者検証もできるようにするため、表計算ソフト Excel を利用した演算処理をしてみる。

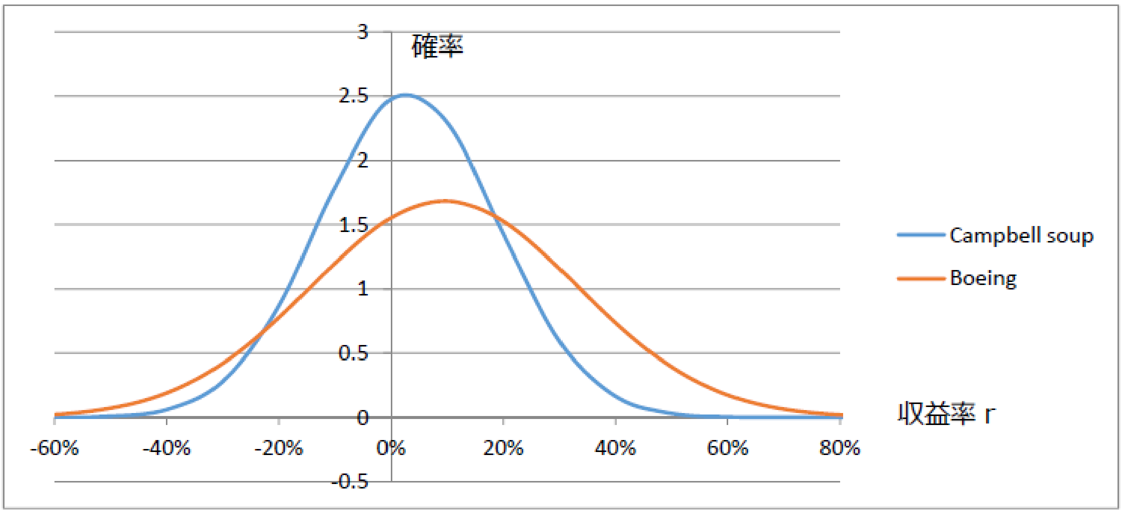
２３　CAPM モデルの論証

本書では、「１４　CAPM モデル（概論）」にあるとおり、*Market Risk Premium* と *Risk Premium* とに比例関係があることを前提として、[161] 比例定数βを求める方向の説明をしてきた。もっとも、実際に提唱された CAPM モデルは、両者に比例関係があること、かつ、その際の比例定数となるβが、$\beta = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ の形をとることを積極的に論証している。[162] 以下、その内容を数式等で確認してみる。

いま、以下の２つの投資先があるとする。[163]

・Boeing 社　　期待収益率 r_B = 9.5%　　収益率の標準偏差 σ_B =23.7%
・Campbell Soup 社　　期待収益率 r_C = 3.1%　　収益率の標準偏差 σ_C =15.8%

このときの両社の収益率の分布状況は、以下のとおりのグラフとなる（横軸を収益率、縦軸をその収益率が得られる確率とした）。グラフから分かるとおり、Boeing 社の赤色山線グラフは、r_B = 9.5% の地点で最も高くなる。また、Boeing 社の標準偏差σ_B は Campbell Soup 社より大きいため、赤色山線が全体的に左右に広がりばらけた形になっている。



これを大雑把に言えば、Boeing 社株式は、変動リスクは高いが、高い収益が見込める株

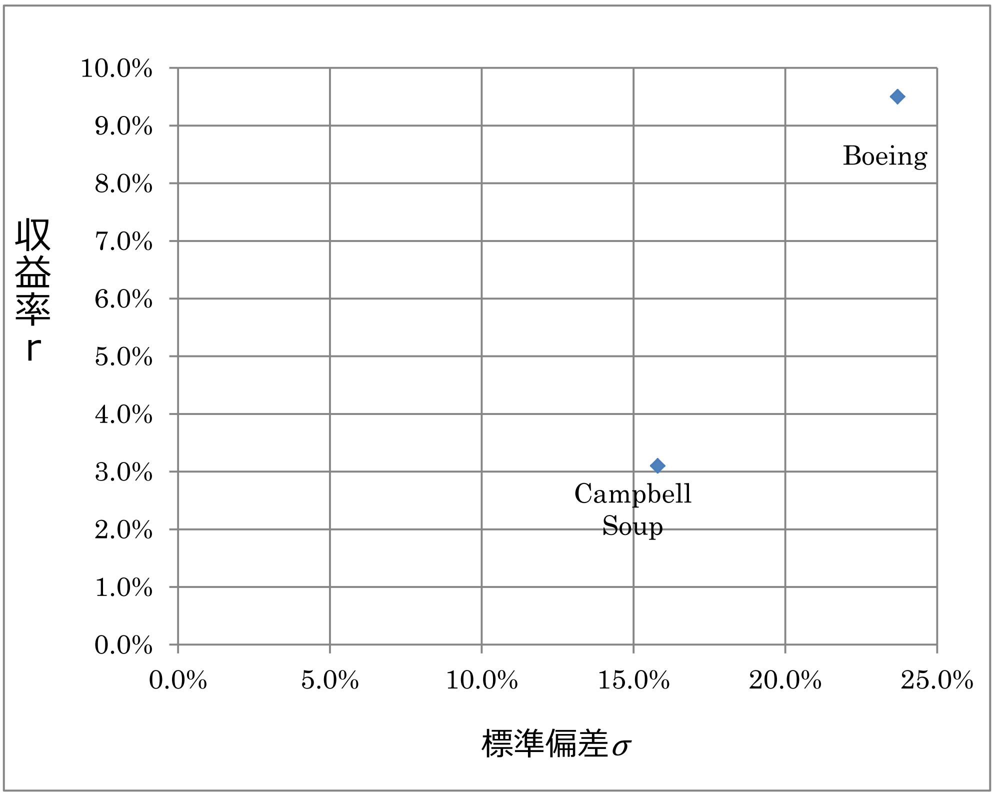
161 参考文献Ｂの２００頁に、米国企業１０社について、β値と期待収益率の一覧表がある。なお、同表の期待収益率（Expected Return）欄には、「$r_f = \beta(r_m - r_f)$」との記述があるが、本文の記載内容に照らして誤植であり、正しくは「$r_f + \beta(r_m - r_f)$」であると考えられる。

162 William F. Sharpe. 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. The Journal of Finance, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442. http://www.jstor.org/stable/2977928

163 参考文献Ｂ（日本語版第１０版）２８２頁の設例を用いた。

式であるのに対して、Campbell Soup 社株式は、収益率の高望みはそれほど出来ないが、ブレが小さく確実な収益を期待できる投資先ということになる。

両社の株式は、別の視点からもグラフ化が可能である。例えば、横軸に標準偏差 σ をとり、縦軸に収益率 r をとり、両者の株式の位置をプロットしてみると、以下のグラフのようになる。



この座標平面（σ,r）型のグラフからも、Boeing 社株式は変動リスクが高いが期待収益率の高い投資先であるのに対して、Campbell Soup 社株式は、期待収益率は低いが変動リスクが小さい投資先であることが読み取れる。

ここで思いつくことは、二つの投資先に分散投資した場合の投資組合せ（すなわちポートフォリオ）の投資性質（σ や r の値）は、どうなるかということである。例えば、投資額１００万円のうち４０万円を Boeing 社株式に、残６０万円を Campbell Soup 社に各々投資した場合、総体としての投資ポートフォリオは、どのような収益率 r と標準偏差 σ を持つ投資となるであろうか。先ず、収益率 r については、収益を投資で割ったものであるから、以下のようにあらわすことができる。

$$r_T = \frac{Income_T}{Investment_T}$$

・r_T　…全体の収益率（%）

・$Income_T$　…全収益（万円）
・$Investment_T$　…全投資（万円）

ここで、全収益は、Boeing 社株式の収益と Campbell Soup 社株式の収益の合計値であるから、上記式は、以下のようになる。

$$r_T = \frac{Income_B + Income_C}{Investment_T}$$

・$Income_B$　…Boeing 社株式の収益（万円）
・$Income_C$　…Campbell Soup 社株式の収益（万円）

そして、各社株式の収益は、各投資に収益率を乗じたものであるから、上記式は更に以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} r_T &= \frac{Investment_B \times r_B + Investment_C \times r_C}{Investment_T} \\ &= \frac{Investment_B}{Investment_T} \times r_B + \frac{Investment_C}{Investment_T} \times r_C \end{aligned}$$

・$Investment_B$　…Boeing 社株式への投資額（万円）
・$Investment_C$　…Campbell Soup 社株式への投資額（万円）

これに上記数値を代入すると、

$$\begin{aligned} r_T &= \frac{40}{100} \times 9.5\% + \frac{60}{100} \times 3.1\% \\ &= 3.8\% + 1.86\% \\ &= 5.66\% \end{aligned}$$

となる。すなわち、期待収益率は、各社の期待収益率を投資額割合で加重平均したもので求められることが分かった。これを整理すると、

・w　…Boeing 社株式への投資比率
・$1 - w$　…Campbell Soup 社株式への投資比率

とすれば、

$$\begin{aligned} r_T &= \frac{Investment_B}{Investment_T} \times r_B + \frac{Investment_C}{Investment_T} \times r_C \\ &= wr_B + (1 - w)r_C \end{aligned}$$

と簡略な形で式が整理された。

次に、標準偏差σはどうか。標準偏差の定義は、１０９頁に示したとおり、分散を√した
たものであった。

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_T^2}$$

そして、分散の定義は、１０７頁にあるとおり、各要素と平均値との差（偏差）を二乗拡大したものを全要素分足し合わせて、最後に要素数で割ったものであった。

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(r_{Tk} - \overline{r_T})^2$$

- N …全体のデータ個数
- r_{Tk} …個別の収益率値（%）。すなわち、r_{T1} 、r_{T2} 、r_{T3} … r_{TN}
- $\overline{r_T}$ …収益率の平均値（%）

したがって、この r_{Tk} に Boeing 社株式と Campbell Soup 社株式の投資割合による重みづけをした（加重平均をした）個別の収益率 N セットを代入し、$\overline{r_T}$ に Boeing 社株式と Campbell Soup 社株式の投資割合による重みづけをした期待収益率（上記計算結果によれば４：６の投資割合のときは 5.56%）を代入すれば具体的計算は可能である。

では、一般式はどのような形となるか。投資割合が、$w : (1-w)$ なのであるから、

$$\begin{cases} r_{Tk} = wr_B + (1-w)r_C \\ \overline{r_T} = w\overline{r_B} + (1-w)\overline{r_C} \end{cases}$$

を、上記の分散 σ_T^2 の式に代入すればよい。ここで、表記を簡潔にするために、

$$\begin{cases} r_B = x \\ r_C = y \\ w = a \\ (1-w) = b \\ \sigma_B = \sigma_x \\ \sigma_C = \sigma_y \\ \sigma_{BC} = \sigma_{xy} \end{cases}$$

と表記することにすると、

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(r_{Tk} - \overline{r_T})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\{(ax_k + by_k) - (a\overline{x} + b\overline{y})\}^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(ax_k - a\overline{x} + by_k - b\overline{y})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\{a(x_k - \overline{x}) + b(y_k - \overline{y})\}^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\{a^2(x_k - \overline{x})^2 + 2ab(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) + b^2(y_k - \overline{y})^2\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}a^2(x_k - \overline{x})^2 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}2ab(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}b^2(y_k - \overline{y})^2$$

$$= a^2\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2 + 2ab\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) + b^2\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \overline{y})^2$$

$$= a^2\sigma_x^2 + 2ab\sigma_{xy} + b^2\sigma_y^2$$

となる（最終行への式変形は、分散と共分散の定義そのものである）。つまり、ある分散 σ_x^2 を有する集団に、別の分散 σ_y^2 を有する集団を加えて一緒にした新しい集団の分散 σ_T^2 は、各標準偏差に比率をかけたものを二乗したもの（$a^2\sigma_x^2$ や $b^2\sigma_y^2$）と、配分比率どうしの乗算 ab に共分散 σ_{xy} を乗じたものを二倍したもの（ $2ab\sigma_{xy}$ ）の和である。

$$\sigma_T^2 = a^2\sigma_x^2 + 2ab\sigma_{xy} + b^2\sigma_y^2$$

上記式を視覚的に整理すると、以下のような表となる。この表の４つの枠の数値を全部足せば、新しい集団の分散 σ_T^2 を求めることができるということである。[164]

	a	b
a	$a^2\sigma_x^2$	$ab\sigma_{xy}$
b	$ab\sigma_{xy}$	$b^2\sigma_y^2$

164 参考文献Ｂ１７７頁に同様の図表がある。

求めるべき標準偏差（Boeing 社株式と Campbell Soup 社株式とに混合投資した際の全体の収益率の標準偏差）は、以下のとおり、両辺を√すれば導かれる。

$$\sigma_T = \sqrt{a^2\sigma_x^2 + 2ab\sigma_{xy} + b^2\sigma_y^2}$$

簡易表記を基に戻すと、以下のとおりである。

$$\sigma_T = \sqrt{w^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\sigma_{BC} + (1-w)^2\sigma_C^2}$$

このように、 σ_T についても、一般的な形の式（個別収益率のデータが何百個もなくても、配分比、個別株式の標準偏差及び共分散がわかれば計算可能な式）になった。なお、相関係数 ρ を用いて上記式を表現すると、[165] 以下のとおりとなる。

$$\sigma_T = \sqrt{w^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_B\sigma_C + (1-w)^2\sigma_C^2}$$

Boeing 社株式と Campbell Soup 社の収益率に何らの連動性もなければ相関係数 ρ ＝０であり、完全一致の連動をする場合は $\rho = 1$ となる。ちなみに、過去実績では、両社の株式の相関係数は、０．１８であるので、[166] 具体的に標準偏差の計算ができる。例えば、投資額１００万円のうち４０万円を Boeing 社株式に、残６０万円を Campbell Soup 社に各々投資した場合、総体としての投資ポートフォリオの標準偏差は、上記式に、

$$\begin{cases} w = \dfrac{40}{100} \\ \sigma_B = 23.7\% \\ \sigma_C = 15.8\% \\ \rho = 0.18 \end{cases}$$

を代入して、以下のとおり求められる。

$$\sigma_T = \sqrt{w^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_B\sigma_C + (1-w)^2\sigma_C^2}$$

---

165 相関係数を用いれば、以下のとおり共分散を表現できる。本書１１３頁参照。

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$\sigma_{xy} = \rho\sigma_x\sigma_y$$

166 参考文献Ｂの日本語版（第１０版）２８２頁

$$= \sqrt{\left(\frac{40}{100}\right)^2 \times (23.7)^2 + 2 \times \left(\frac{40}{100}\right)\left(1 - \frac{40}{100}\right) \times 0.18 \times 23.7 \times 15.8 + \left(1 - \frac{40}{100}\right)^2 \times (15.8)^2}$$

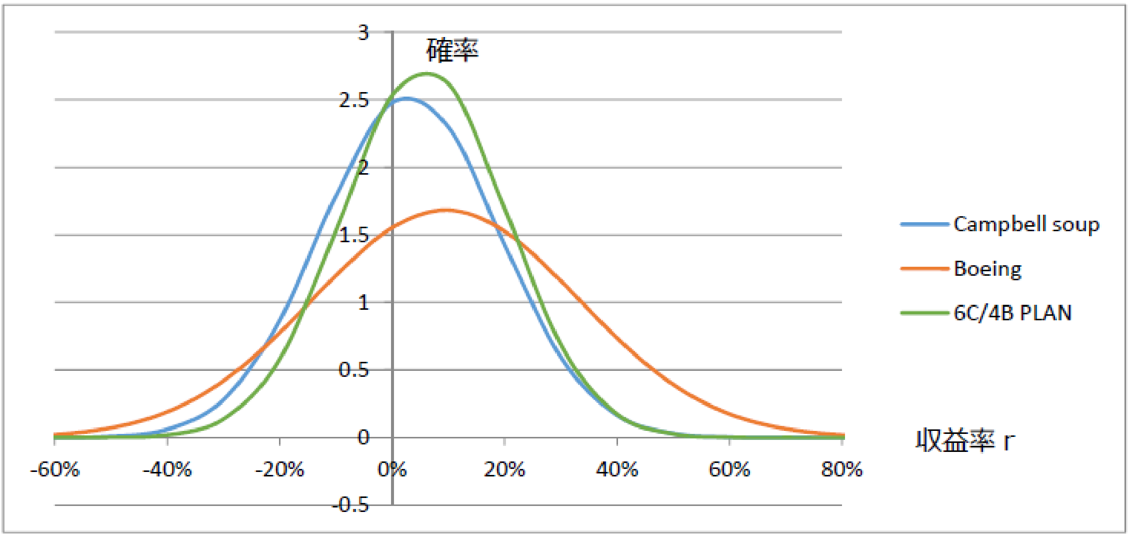
$$= \sqrt{0.16 \times 561.69 + 2 \times 0.4 \times 0.6 \times 0.18 \times 23.7 \times 15.8 + 0.36 \times 249.64}$$

$$= \sqrt{89.8704 + 32.3533 + 89.8704}$$

$$= \sqrt{212.096}$$

$$= 14.56$$

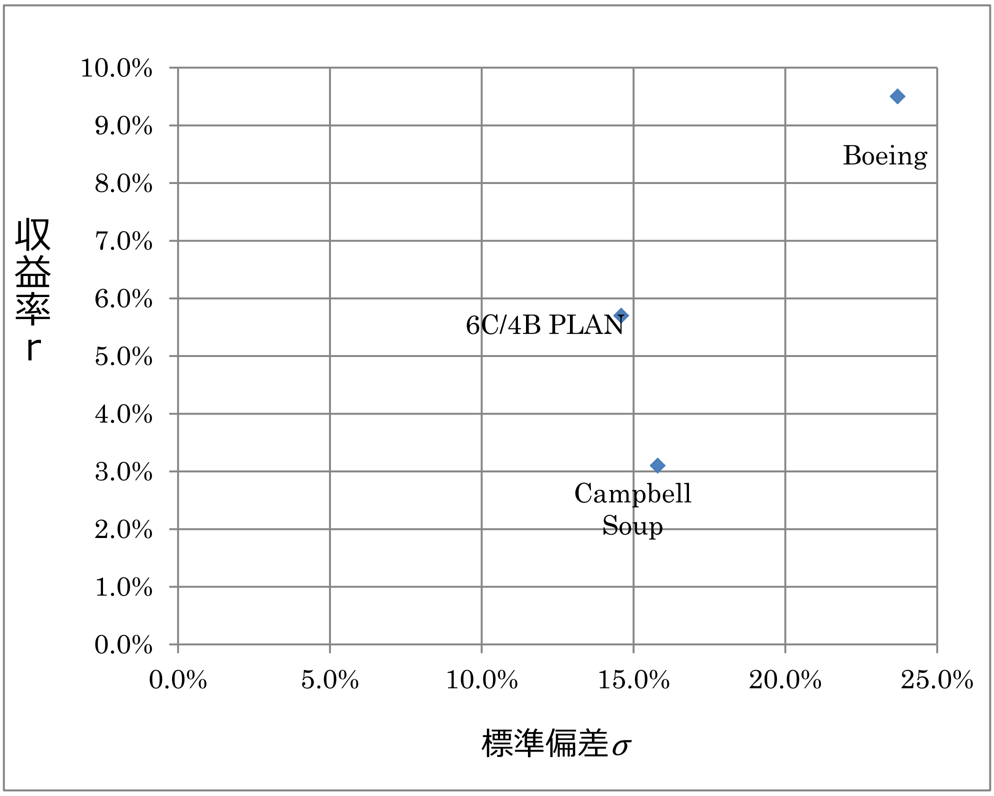
以上のとおり、総体としての投資ポートフォリオについて標準偏差は約１４．６％、収益率は約５．７％と算出できた。これを先ほどの収益率の分布状況グラフに反映させてみると、以下のとおりとなる。



Campbell Soup 社株式を６、Boeing 社株式を４の比率で投資金を割り振って混合投資したプラン（緑色の 6C/4B PLAN）は、収益率は両者の６：４の按分点に位置するが、標準偏差は両社いずれよりも小さくなる。つまり、収益率のブレが小さくなり、安定感が増している。突端部分の確率も上昇しており、より期待収益率の実現確率が高まっている。[167]

座標平面（σ,r）のグラフにも、6C/4B PLAN をプロットしてみる。

167 かかる現象は、分散投資によるリスク減少（マーケット・ポートフォリオの分散効果）と称されている。



6C/4B PLAN の標準偏差が、両社株式単独での標準偏差と比べて、いずれよりも減少していることが目視確認できる。

ここで、他の混合投資プランだと、上記の標準偏差や収益率がどのようになるかを考えてみる。例えば、Campbell Soup 社と Boeing 社株式への投資割合を、堅実に８：２としてみたり、逆に高い収益率を求めて、１：９にしてみたりすることも考えられる。

数式上は、収益率 r は、各社の期待収益率を投資額割合で加重平均したものにより座標ポイントが定まるので（１１９頁）、縦軸方向には直線的に移動すると思われる。他方で、標準偏差 σ については、上記式を以下のとおり整理すると、

$$\sigma_T = \sqrt{w^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\sigma_{BC} + (1-w)^2\sigma_C^2}$$

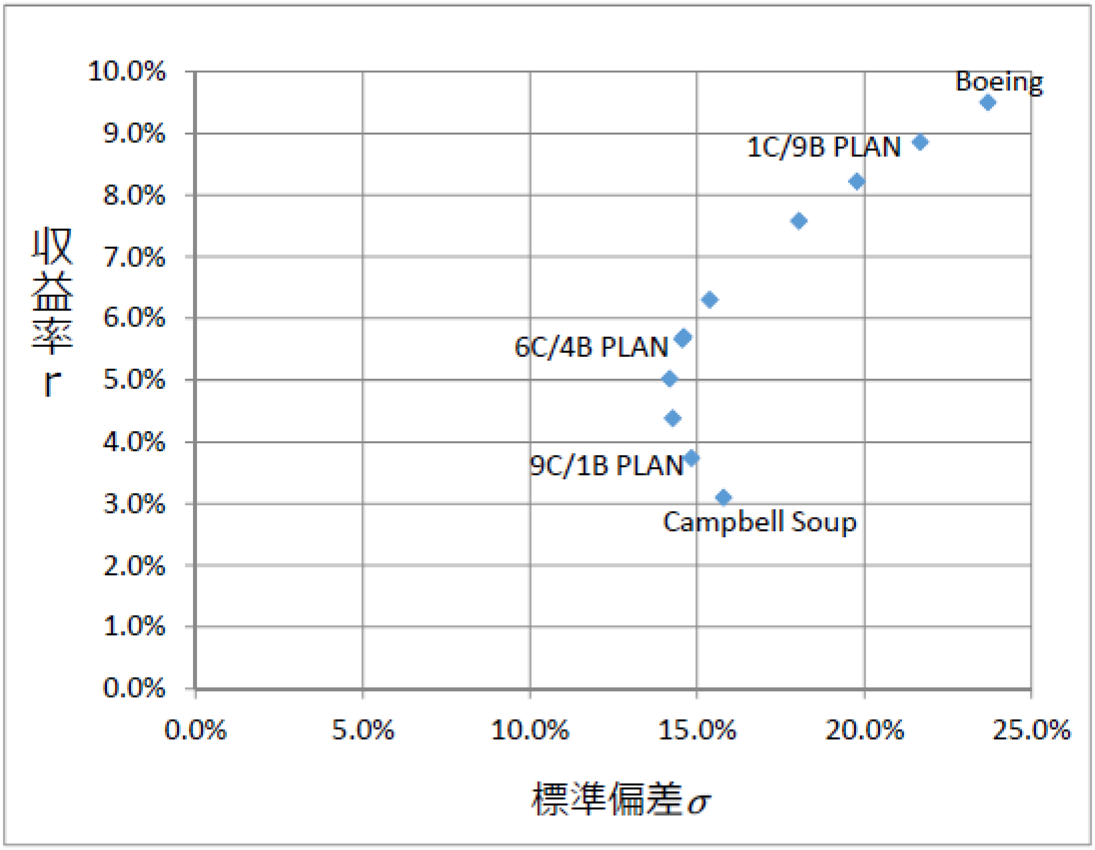
$$= \sqrt{w^2\sigma_B^2 + 2w\sigma_{BC} - 2w^2\sigma_{BC} + (1-2w+w^2)\sigma_C^2}$$

$$= \sqrt{w^2\sigma_B^2 + 2w\sigma_{BC} - 2w^2\sigma_{BC} + \sigma_C^2 - 2w\sigma_C^2 + w^2\sigma_C^2}$$

$$= \sqrt{w^2\sigma_B^2 + w^2\sigma_C^2 - 2w^2\sigma_{BC} + 2w\sigma_{BC} - 2w\sigma_C^2 + \sigma_C^2}$$

$$= \sqrt{(\sigma_B^2 + \sigma_C^2 - 2\sigma_{BC})w^2 + 2(\sigma_{BC} - \sigma_C^2)w + \sigma_C^2}$$

投資割合 w の二次式（に√がかかったもの）となっているので、横軸には直線的に移動することはなく、放物線が横になったグラフを全体で描くと予想される。これを実際にいくつかの w の数値を入れて計算してプロットしてみると、以下のようになる。



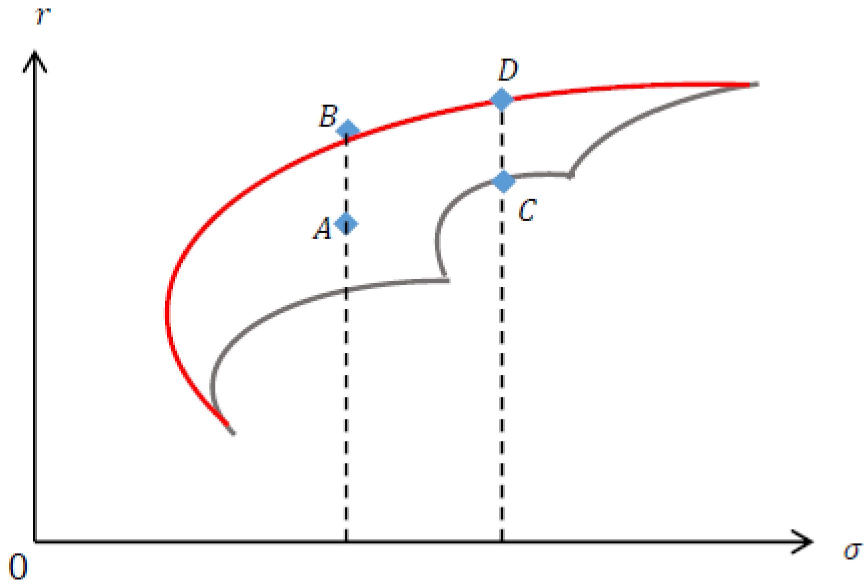
このように、複数の株式投資を組み合わせることにより、投資家は、一定の選択肢の中で、投資セット（ポートフォリオ）の標準偏差と収益率を、ある程度コントロールすることができる。選択肢は、上記グラフにあるとおり、投資株式が二つであれば横放物線上の任意の点となる。もっとも、同じ標準偏差（収益率の結果のばらつき）であれば、投資家はより高い収益率を望む筈である。例えば、同じ１５％の標準偏差であれば、合理的な投資家は、期待収益率３％台の投資組み合わせ点（9C/1B PLAN）よりは、期待収益率６％近くの投資組み合わせ点（6C/4B PLAN）を選ぶであろう。

ちなみに、投資先が三個以上になった場合、計算は複雑になり、[168] 座標平面（σ,r）のグラフ上で投資家がとれる投資組み合わせの点も増加していく。イメージとしては、下記の図版の曲線上だけでなく曲線で囲まれた領域から選択可能になる。

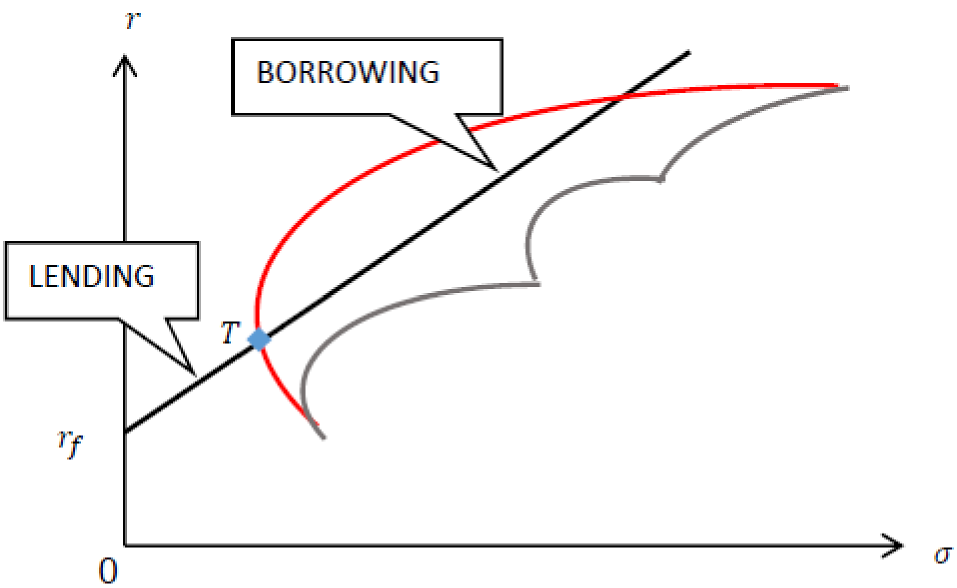
もっとも、その場合でも、同じ標準偏差（収益率の結果のばらつき）であれば、合理的な投資家はより高い収益率を望む筈であるから、合理的な投資家は、下記図版のうち、赤

[168] 投資株式が２種類のときは、２×２＝４個の箱を合計すればよかった（１２１頁）。株式が N 種類のときは、$N \times N = N^2$ の箱を合計することになる。参考文献Ｂ１７９頁。

色曲線のどこかの点を投資ポートフォリオとして採用する筈である。例えば、下記図版のうち、赤色線と灰色歯形部分とに挟まれた領域上の点Aを投資ポートフォリオとして敢えて選択する投資家は存在しない。なぜなら、同じ標準偏差（収益率の結果のばらつき）がある点Bの方が、収益率が高いからである。同様に、灰色部分の歯形になっている線上の点Cを敢えて選ぶ投資家はいない。同じ結果のばらつきならば、収益率の高い点Dの投資を選択するからである。



　ここで、株式投資以外の資金投資先（と資金調達先）を考慮してみる。具体的には、無リスク金利（日本国債の収益率 r_f %）での貸付け（Lending）や借入（Borrowing）を、投資家が実行できると想定する。[169]　この場合、投資家は、国債投資という選択肢をも新たな投資先として含めるため、投資可能な点を更に広げることができる。



169 国債を購入すれば、同利率での投資をしたことになる。もっとも、国債と同利率で、個人や企業が市場から資金を借り入れできるという上記想定は現実的ではない。

例えば、上記の図版のＴ点のポートフォリオと無リスク投資との組み合わせにより、新たなポートフォリオを組むことができる。この新たなポートフォリオは、上記の図版にあるとおり、無リスク投資（縦軸上の r_f 点）と点Ｔとを結ぶ直線になる筈である。

これを計算式で確かめてみる。点Ｔにおける標準偏差が σ_T で、期待収益率が r_T であるとする。かたや日本国債の期待収益率は上述のとおり r_f であるが、その標準偏差 σ_f は０という特殊性がある（すなわち不確実性がゼロ。絶対確実に利回り r_f が保証された安全な投資先）。このような無リスク投資先（ただし期待収益率は低い）と上記Ｔ点で示される投資先とを、投資比率を、Ｔ：日本国債＝w：（$1-w$）で組み合わせたポートフォリオＵの持つ期待収益率 r_U と標準偏差 σ_U は、これまでの議論を踏まえれば、以下のようになる。

$$\begin{cases} r_U = wr_T + (1-w)r_f \\ \sigma_U = \sqrt{w^2\sigma_T^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_T\sigma_f + (1-w)^2\sigma_f^2} \end{cases}$$

ここで、第一式は、以下のような w の一次関数である。

$$\begin{aligned} r_U &= wr_T + (1-w)r_f \\ &= wr_T + r_f - wr_f \\ &= (r_T - r_f)w + r_f \end{aligned}$$

また、上述したとおり、日本国債の収益率の標準偏差はゼロであるから、

$$\sigma_f = 0$$

を第二式に代入すると、

$$\begin{aligned} \sigma_U &= \sqrt{w^2\sigma_T^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_T\sigma_f + (1-w)^2\sigma_f^2} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_T^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_T \times 0 + (1-w)^2 \times 0^2} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_T^2} \\ &= w\sigma_T \end{aligned}$$

となる。よって、上記連立式は、以下のように整理される。

$$\begin{cases} r_U = (r_T - r_f)w + r_f \\ \sigma_U = w\sigma_T \end{cases}$$

第二式を変形して、

$$\sigma_U = w\sigma_T$$

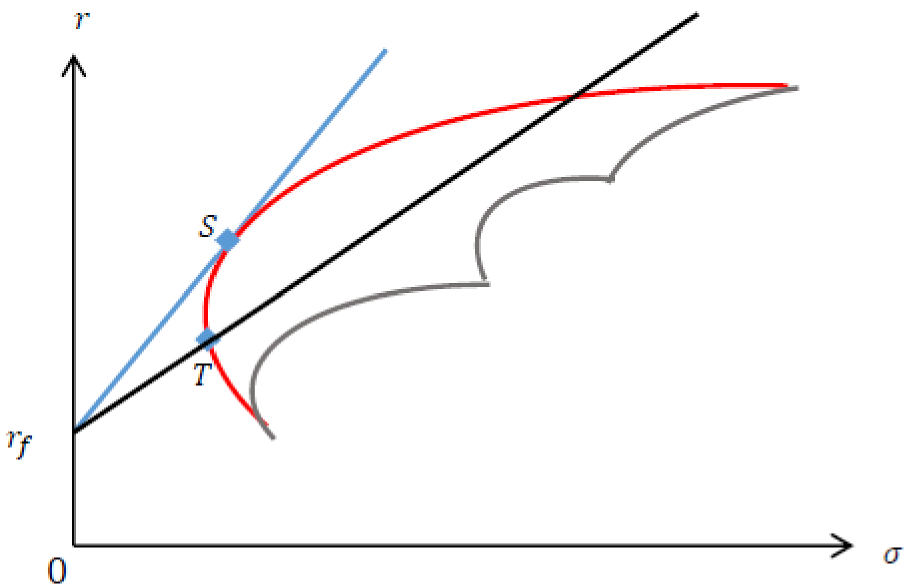
$$\frac{\sigma_U}{\sigma_T} = w$$

としたものを、第一式の w に代入すると、

$$\begin{aligned} r_U &= (r_T - r_f)w + r_f \\ &= \left(r_T - r_f\right)\left(\frac{\sigma_U}{\sigma_T}\right) + r_f \\ &= \frac{\left(r_T - r_f\right)}{\sigma_T}\sigma_U + r_f \end{aligned}$$

となる。これは、株式と日本国債とで新たに作られたポートフォリオ U の収益率r_U と標準偏差σ_U とが比例的関係（一次関数の関係）にあることを示している。すなわち、座標平面（σ,r）上に示せば、縦軸のr_f の点と点 T とを結んだ直線が投資可能な点の最効用群となる。

ここでグラフをよく見ると、黒色直線 r_f T のラインは必ずしもベストな投資ではないことに気づく。すなわち、同黒色直線の上側の領域にも投資可能な部分（赤色曲線と黒色直線との間の領域部分）があるからである。同じ標準偏差（期待収益に対する同じバラつき）があるならば、合理的な投資家は、より高い期待収益率を与える投資点を選択する。よって、ポートフォリオ T 点は、無リスク投資先と組み合わせる観点からは、ベストな選択ではないポートフォリオということになる。では、どのポートフォリオが、無リスク投資先と組み合わせるに最も適した点となるのだろうか。

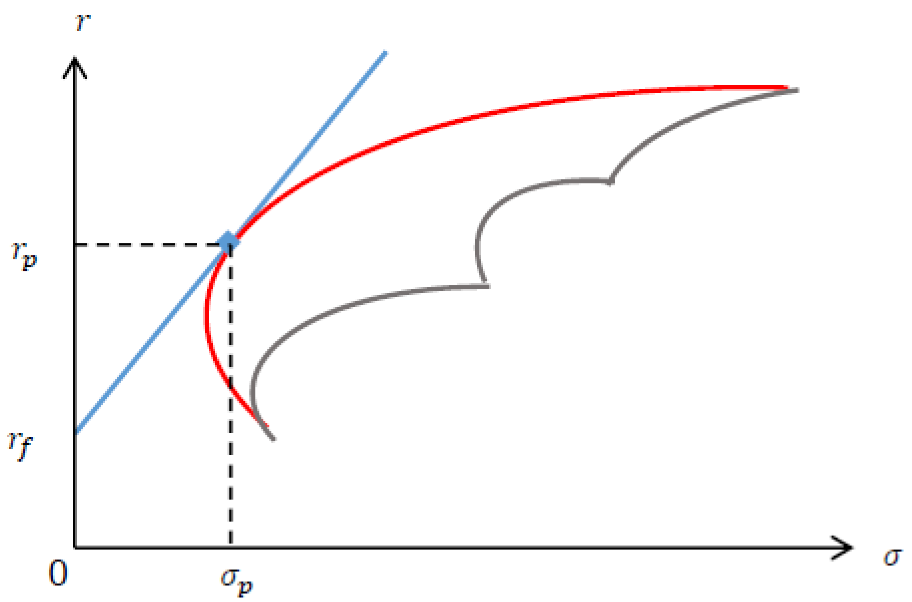


それは上記グラフで言えば、ポートフォリオ S の如き点（r_f から赤色曲線へ接線＝青色直線を引いた場合の接点）である。すなわち、このようなポートフォリオ S 点と無リスク投資先との組み合わせによる新ポートフォリオは、上記グラフの青色直線となり、この直線

上の点よりも、有利な投資は存在しないことになる。したがって、合理的な投資家は、上記 S と無リスク投資とを組み合わせた、青色直線上の投資点を選ぶ筈である。

次に、既存の市場ポートフォリオに対して、新たな資産を加えた場合に、上記 S 点における接線がどのように変化するかを観察する。この観察結果から、CAPM モデルを導くことができる。

ある市場ポートフォリオ M に、資産 i を加えて、新たなポートフォリオ P を組むとする。新ポートフォリオ P の期待収益率を rp、標準偏差を σp とすると、座標平面（σ, r）における無リスク投資と組み合わせた場合の合理的な投資直線ラインを、以下のとおり、曲線の接線（青色直線）として描くことができる。



上記接線の傾きは、新ポートフォリオ P を示す曲線上の点（σ, r）における赤色曲線の微小変化度合いと同じであるから、[170] 以下のように、微分形式で示すことができる。[171]

$$\frac{dr_p}{d\sigma_p}$$

ここで、全体の投資を１（すなわち１００％）とし、資産 i に投資する分を w とする。そうすると、残り $1-w$ が M への投資分となる。w の値により、新ポートフォリオ P は、

170 値が異なると、直線は曲線に喰いこんでしまい、接線とならなくなるため。

171 σp を微量だけ増加させたときに、rp も変化するので、その変化割合について、極限（微量変化分を０に近づけたときの値）をとり、微分形式で表現したもの。

その位置を変化させる。すなわち、上記 σ_p と r_p のいずれもが、w の関数である。そこで、両者を同じ w で微分してみると、[172] 以下のようになる。

$$\frac{dr_p}{d\sigma_p} = \frac{\left(\frac{dr_p}{dw}\right)}{\left(\frac{d\sigma_p}{dw}\right)}$$

この式の分子は、$r_p = wr_i + (1-w)r_M$ （期待収益率の加重平均。１１９頁参照）を w で微分したものであるから、

$$\frac{dr_p}{dw} = \frac{wr_i + (1-w)r_M}{dw}$$
$$= \frac{r_M + w(r_i - r_M)}{dw}$$

この微分を実行すると（分子の初項r_M は定数のため w による微分では消えてなくなる。巻末の定義・公式索引の微分公式（定数）参照)、以下のとおりに整理される。

$$\frac{dr_p}{dw} = r_i - r_M$$

他方、分母 $\frac{d\sigma_p}{dw}$ については、 σ_p に着目する。すなわち、新ポートフォリオ P の標準偏差がσ_pであるということは、元のポートフォリオ M の標準偏差をσ_M、資産 i の標準偏差をσ_i両者の共分散を σ_{iM} とすると、新ポートフォリオ P の分散σ_p^2 は、以下の表の四つの箱の要素を合計したものであるから（１２１頁参照)、

	i	M
i	$w^2\sigma_i^2$	$w(1-w)\sigma_{iM}$
M	$w(1-w)\sigma_{iM}$	$(1-w)^2\sigma_M^2$

$$\sigma_p^2 = (1-w)^2\sigma_M^2 + w^2\sigma_i^2 + w(1-w)\sigma_{iM} + w(1-w)\sigma_{iM}$$

[172] 数式上は同じ要素で微分しているだけであるが、r_p の w 微分は、期待収益率が投資配分 w を変えることでどの程度変動するのかを知る意味がある。σ_pの w 微分は、標準偏差が投資配分 w を変えることでどの程度変動するのかを示す。

となる。これを、w について微分すると、σ_p 及び $(1-w)$ は w の関数であるが、σ_M 、σ_i 及びσ_{iM}は w の関数ではなく定数とみなせることから、[173]

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dw}\sigma_p^2 &= \frac{d}{dw}\{(1-w)^2\sigma_M^2 + w^2\sigma_i^2 + 2w(1-w)\sigma_{iM}\} \\
\frac{d\sigma_p}{dw}\times\frac{\sigma_p^2}{\sigma_p} &= \frac{d}{dw}(1-w)^2\sigma_M^2 + \frac{d}{dw}w^2\sigma_i^2 + \frac{d}{dw}2w(1-w)\sigma_{iM} \\
\frac{d\sigma_p}{dw}\times 2\sigma_p &= \sigma_M^2\frac{d}{dw}(1-w)^2 + \sigma_i^2\frac{d}{dw}w^2 + 2\sigma_{iM}\frac{d}{dw}w(1-w) \\
2\sigma_p\,\frac{d\sigma_p}{dw} &= \sigma_M^2\frac{d}{dw}(1-w)\times\frac{d}{d(1-w)}(1-w)^2 + \sigma_i^2\times 2w + 2\sigma_{iM}\frac{d}{dw}(w-w^2) \\
2\sigma_p\,\frac{d\sigma_p}{dw} &= \sigma_M^2\times(-1)\times 2(1-w) + 2w\sigma_i^2 + 2\sigma_{iM}(1-2w) \\
2\sigma_p\frac{d}{dw}\sigma_p &= -2(1-w)\sigma_M^2 + 2w\sigma_i^2 + 2(1-2w)\sigma_{iM} \\
\sigma_p\frac{d}{dw}\sigma_p &= -(1-w)\sigma_M^2 + w\sigma_i^2 + (1-2w)\sigma_{iM} \\
\frac{d}{dw}\sigma_p &= \frac{-(1-w)\sigma_M^2 + w\sigma_i^2 + (1-2w)\sigma_{iM}}{\sigma_p}
\end{aligned}
$$

となる。すなわち、分母部分も、以下のように書き換えられる。

$$\frac{d}{dw}\sigma_p = \frac{-(1-w)\sigma_M^2 + w\sigma_i^2 + (1-2w)\sigma_{iM}}{\sigma_p}$$

そうすると、上記の接線の傾きを表す分数は、

$$\frac{r_i - r_M}{\left(\dfrac{-(1-w)\sigma_M^2 + w\sigma_i^2 + (1-2w)\sigma_{iM}}{\sigma_p}\right)}$$

---

173 σ_p^2 を直接に w で微分できないことから、σ_p^2 をσ_p で微分したもの $\frac{\sigma_p^2}{\sigma_p}$ と、σ_p を w で微分したもの $\frac{d\sigma_p}{dw}$ との積に分解して計算をするという手法を用いた。イメージとしては、小型の歯車 w が 1 回転した際の中型歯車σ_p の回転数 $\frac{d\sigma_p}{dw}$ と、中型歯車σ_p が 1 回転した際の大型歯車σ_p^2 の回転数 $\frac{\sigma_p^2}{\sigma_p}$ とを、掛け合わせることにより、小型の歯車 w が 1 回転した際の大型歯車σ_p^2 の回転数 $\frac{d}{dw}\sigma_p^2$ を求めるというものである。$(1-w)^2$の w 微分も同様に、$\frac{\mathrm{d}}{dw}(1-w)$と $\frac{d}{d(1-w)}(1-w)^2$ とに分解して掛け合わせている。合成関数の微分、置換微分と呼ばれる計算手法である。一般式では、$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ と表現できる。

と変形できる。

ここで、$w=0$ の場面を考える。その場合、資産 i に投資する分が $w=0$ なのであるから、ポートフォリオ P はポートフォリオ M そのものと一致する。つまり、$\sigma_p = \sigma_M$ である。このとき、上記接線の傾きを表す分数は、以下のような数値をとる。

$$\frac{r_i - r_M}{\left(\frac{-(1-w)\sigma_M^2 + w\sigma_i^2 + (1-2w)\sigma_{iM}}{\sigma_p}\right)}$$

$$= \frac{r_i - r_M}{\left(\frac{-(1-0)\sigma_M^2 + 0 \times \sigma_i^2 + (1-2\times 0)\sigma_{iM}}{\sigma_p}\right)}$$

$$= \frac{r_i - r_M}{\left(\frac{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}}{\sigma_p}\right)}$$

$$= \frac{r_i - r_M}{\left(\frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$$

他方で、ポートフォリオ M（期待収益率は r_M、標準偏差は σ_M ）の座標平面（σ,r）における接線の傾きは、点（$0, r_f$）と点（σ_M, r_M）を結ぶ直線の傾きであるから、

$$\frac{r_M - r_f}{\sigma_M - 0}$$

$$= \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$$

である。

$w=0$ とした場合のポートフォリオ P は、ポートフォリオ M と同じなのであるから、$w=0$ としたときのポートフォリオ P にかかる接線の傾きと、ポートフォリオ M にかかる接線の傾きとは等しいから、

$$\frac{r_i - r_M}{\left(\frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$$

が成立する。
これを変形すると、

$$\frac{r_i - r_M}{\left(\frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$$

$$
\begin{aligned}
r_i - r_M &= \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M} \times \frac{r_M - r_f}{\sigma_M} \\
&= \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M^2} \times \left(r_M - r_f\right) \\
&= \left(\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} - \frac{\sigma_M^2}{\sigma_M^2}\right) \times \left(r_M - r_f\right) \\
&= \left(\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} - 1\right) \times \left(r_M - r_f\right) \\
&= \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}\left(r_M - r_f\right) - \left(r_M - r_f\right)
\end{aligned}
$$

よって、以下の等式が成立する。

$$
\begin{aligned}
r_i - r_M + \left(r_M - r_f\right) &= \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}\left(r_M - r_f\right) \\
r_i - r_f &= \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}\left(r_M - r_f\right)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$\beta = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

と表記することにすると、上記等式は、

$$r_i - r_f = \beta\left(r_M - r_f\right)$$

と表される。

　これが、市場ポートフォリオ M に、資産 i を加えた場合の関係式である。この式で、市場ポートフォリアは任意のものでも構わないので、十分に分散投資された市場ポートフォリオ（例えば東証株価指数 TOPIX）を M としても等式は成立する。この場合、上記の式は、$r_i - r_f$ （すなわち Risk Premium）が、$r_M - r_f$ （すなわち Market Risk Premium）と正比例の関係にあることを示している。同時に、この式は、その比例定数βが、市場の期待収益率の分散を分母とし、対象株式期待収益率と市場期待収益率との共分散を分子とする分数で表されることをも示している。このように、CAPM モデルが導かれた。

（参考：確率 p_l による表記方式）

文献によっては、期待値（平均値）や分散、共分散の定義式において、Σの左側に、$\frac{1}{N}$ がない表記方法（すなわち全体を N で割っていないもの）もある。本書では、定義をΣの左側に$\frac{1}{N}$ がある形で統一表記してあるが、参考までに、以下では、分散について、$\frac{1}{N}$ がない表記方法（確率 p_l による表記方式）を記すこととする。

分散の定義（１０７頁）は、以下のとおりである。

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2$$
$$= \frac{1}{N}\{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_N - \overline{x})^2\}$$
$$= \frac{(x_1 - \overline{x})^2}{N} + \frac{(x_2 - \overline{x})^2}{N} + \frac{(x_3 - \overline{x})^2}{N} + \cdots + \frac{(x_N - \overline{x})^2}{N}$$

この定義における x_k は全部でＮ個あり、x_1 が示す数値（例えば２という数値）は他の要素と同じである可能性がある。例えば、x_8 が示す数値も２、x_{34} が示す数値も２という集合も存在しうる。上記定義式では、同じ数値をとる要素があっても特に集約することなく、各個、偏差の二乗値をとって合計していくことを示している。

ここで、発想を変えて、全体を N 個ではなく、１００％（すなわち合計で１）で表すことを考えてみる。例えば、２という数値をとる要素が全体 N 個のうち３個あるとすれば、そのような要素については、共通のグループとして、

$$\frac{(2 - \overline{x})^2}{N} + \frac{(2 - \overline{x})^2}{N} + \frac{(2 - \overline{x})^2}{N}$$
$$= \left\{\frac{(2 - \overline{x})^2}{N}\right\} \times 3$$

とまとめることができる。また、仮に、５という数値をとる要素が全体 N 個のうち１個もない（すなわち０個）とすれば、

$$\left\{\frac{(5 - \overline{x})^2}{N}\right\} \times 0$$

と表現できる。すなわち、x_l の数値をとるものが全体 N 個のうち f_l 個あるとすれば（x の添え字を $k = 1,2,3, \dots N$ から $l = 1,2,3, \dots N$ へと変更したのは、両者の各要素が一対一では対応しないからである）、

$$\left\{\frac{(x_l - \overline{x})^2}{N}\right\} \times f_l$$
$$= (x_l - \overline{x})^2 \times \frac{f_l}{N}$$

と表現できる。これを踏まえると、分散の式は、

$$\sigma_x^2 = (x_1 - \overline{x})^2 \times \frac{f_1}{N} + (x_2 - \overline{x})^2 \times \frac{f_2}{N} + (x_3 - \overline{x})^2 \times \frac{f_3}{N} + \cdots + (x_N - \overline{x})^2 \times \frac{f_N}{N}$$

と表現できる（要素数は全部で N 個であるから、各要素の値が全部違う場合に N 種類の要素となるので、x_N まで式としては必要である）。ここで、「x_l の数値をとるものが全体 N 個のうち f_l 個ある」ということは、「x_l の数値をとる確率は、$\frac{f_l}{N}$ である」と言い換え可能である。この確率を p_l として数式に示すと、以下のようになる。

$$p_l = \frac{f_l}{N}$$

これを、上記分散の式に代入すると、以下のように整理される。

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= (x_1 - \overline{x})^2 \times \frac{f_1}{N} + (x_2 - \overline{x})^2 \times \frac{f_2}{N} + (x_3 - \overline{x})^2 \times \frac{f_3}{N} + \cdots + (x_N - \overline{x})^2 \times \frac{f_N}{N} \\ &= (x_1 - \overline{x})^2 p_1 + (x_2 - \overline{x})^2 p_2 + (x_3 - \overline{x})^2 p_3 + \cdots + (x_N - \overline{x})^2 p_N \\ &= \sum_{l=1}^{N} (x_l - \overline{x})^2 p_l\end{aligned}$$

この式が、Σの左側に、$\frac{1}{N}$ がない表記方法である。代わりに、元の式にはなかった確率 p_l が右側についている。どちらも計算すれば同じ結果となる。

２４　β値の Excel 計算

本書「２２　β値の一般解（分散、平均値）」の最後に出てきた流れ図作業を Excel で再現してみると、以下のとおりとなる。用いた Excel データは、「２０　トヨタ自動車のβ値」と同じである。同 Excel 表により、先ず、⑥と⑦の平均値を最下行に各々求めた。この平均値と各データとの差（偏差）を出したのが、⑧と⑨である。最終的な分数の分子には、⑧×⑨の数値の縦合計値として１．０６０５％が入り、分母には⑨の二乗の合計値（０．９１３６％）が分母に入る。β値は、１．１６と算出された。

	⑥	⑦	⑧	⑨	＝⑧×⑨	$＝⑨^2$
日付	Ri-Rf	Rm-Rf	Ri-Rf偏差	Rm-Rf偏差	分子へ	分母へ
2017/11/2	1.66%	0.41%	1.7%	0.3%	0.0056%	0.0012%
2017/11/1	0.69%	1.17%	0.7%	1.1%	0.0075%	0.0122%
2017/10/31	-1.23%	-0.28%	-1.2%	-0.3%	0.0043%	0.0012%
2017/10/30	0.06%	-0.01%	0.0%	-0.1%	0.0000%	0.0001%
2017/1/10	-1.00%	-0.71%	-1.0%	-0.8%	0.0078%	0.0061%
2017/1/6	-1.69%	-0.15%	-1.7%	-0.2%	0.0038%	0.0005%
2017/1/5	-0.68%	0.08%	-0.7%	0.0%	0.0000%	0.0000%
2017/1/4						

平均値	0.009%	0.071%

合計値	1.0605%	0.9136%
β値		1.1608
LINEST関数		1.1608

各データ (x, y) とそれから導かれる平均値 $\overline{x}$ 、$\overline{y}$ を使って、a（＝β値）が計算されている様子が Excel 上で確認できる。作業内容の論理構造が、印刷した Excel 表のうえでも明示されているという点で、可読性がある。

ちなみに、同様の計算を自働的におこなう関数として、Excel では、LINEST 関数も用意されている。同関数で用いている計算式は、以下のとおりである。[174]

$$m = \frac{\sum (x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum (x-\overline{x})^2}$$

[174] Microsoft の Linest　関数の解説
https://support.office.com/en-us/article/LINEST-function-84d7d0d9-6e50-4101-977a-fa7abf772b6dopen_in_new

これは、Σが簡略表記されているだけで、本書「２２　β 値の一般解（分散、平均値）」の a の式（$a=\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})}{\sum_{k=1}^{N}(x_k-\bar{x})^2}$）と同内容である。実際、Excel 上で実行させたところ、上記表の右下にある LINEST 関数の欄の数値にあるとおり、同じ数値１．１６が算出された。

他の表現式（$a=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$）に従い、共分散と分散とを Excel で求めて、その割算でβ値を出すことも可能である。以下の Excel 表はその実例である。先ず、COVAR 関数で⑥と⑦を範囲選択し０．０００５１との共分散を得て、VARP 関数で⑦を範囲選択し０．０００４４との分散を得る。そのうえで、COVAR を VARP で割って、β 値を約１．１６と算出している。[175]

	⑥	⑦
日付	Ri-Rf	Rm-Rf
2017/11/2	1.66%	0.41%
2017/11/1	0.69%	1.17%
2017/10/31	-1.23%	-0.28%
2017/10/30	0.06%	-0.01%
2017/1/6	-1.69%	-0.15%
2017/1/5	-0.68%	0.08%
2017/1/4		

COVAR	0.000051
VARP	0.000044
β値	1.1608

一次関数は、傾きと切片により、一意に定まる。Excel では、以下のとおり、傾きを求める SLOPE 関数、切片を求める INTERCEPT 関数も用意されている。この SLOPE 関数でも、傾き（すなわちβ値）は、約１．１６となった。[176]

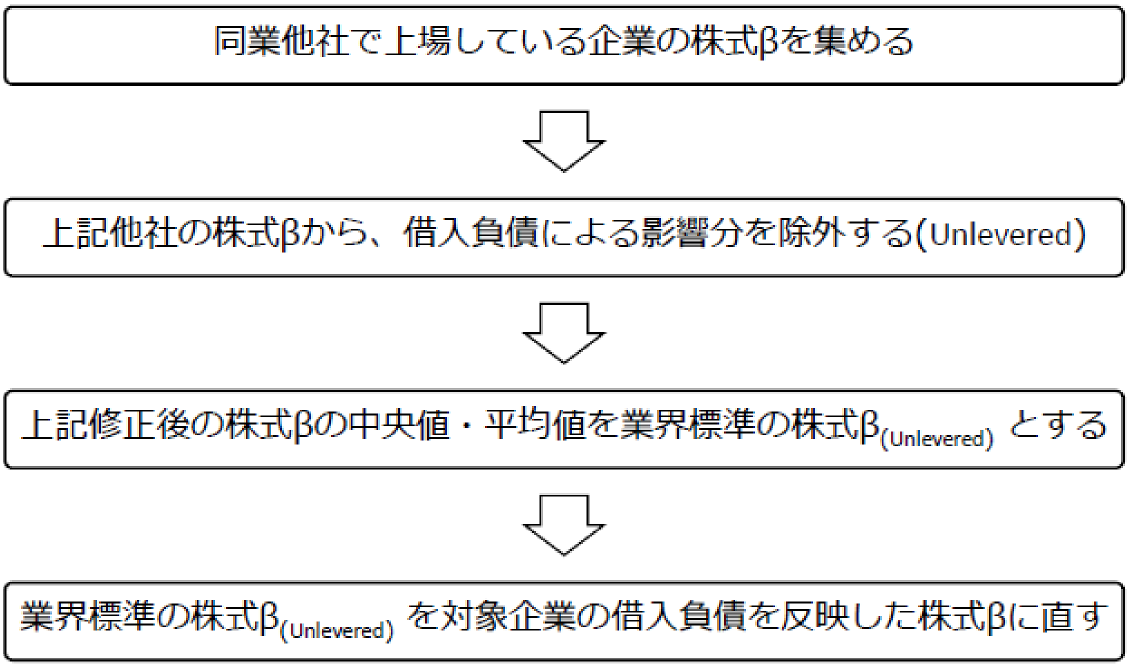
[175] Excel には似たような関数名で、N ではなく、N－１で割る関数もあるので、注意を要する。
[176] SLOPE 関数が基礎とする数式は、LINEST 関数と同じであるが、計算のアルゴリズムは異なる（閾値の処理が異なる）。

日付	① トヨタ終値	② TOPIX 終値	⑥ Ri-Rf	⑦ Rm-Rf
2017/11/2	7,155	1794	1.66%	0.41%
2017/11/1	7,038	1787	0.69%	1.17%
2017/1/6	6,930	1553	-1.69%	-0.15%
2017/1/5	7,049	1556	-0.68%	0.08%
2017/1/4	7,097	1554		

SLOPE	1.1608
INTERCEPT	▲ 0.0007

２５　非上場企業のβ値

前項までの検討の結果、上場企業については、株式β値を計算により求めることができるようになった。問題は、株式が市場で流通していない非上場企業のβ値の算定である。方針としては、類似する上場企業の株式β値を参考にして、業界標準の株式β値を導出し、それを該当する非上場企業の株式β値に換算するというものが考えられる。しかし、β値は各企業に固有の事情がある。特に重視すべきなのは、資本と負債の比率である。一般的に、負債比率が増加すると、財務リスクが増加するため、株主資本コストも上昇するが、他方で、負債の利子支払によるタックスシールド効果（節税効果）により、*WACC* が低下する要因ともなる。[177]　このため、いくら似ている企業どうしであっても、負債比率が異なる企業どうしで、株式β値をそのまま用いるわけにはいかない。そこで、どのような計算式によって、換算をしていくべきかを検討する。[178]　この点、大雑把な方針としては、以下のようなものが考えられる。[179]



先ずは、既存の関係式から、株式βの関係式（負債の影響を除外するための式）を導出してみることにする。

---

[177] 参考文献Ｂの５０３～５０４頁。

[178] 本書６４頁に、日本公認会計士協会が提唱する変換式がある。本項は、同変換式を含め、代表的な他の公式についても、その前提確認と数式導出を試みるものである。

[179] 負債影響除外（Unlever）するときの式と、負債を反映させるとき（Re-lever）の式は、数学上は同じ式である。しかし、Unlever するときに用いるパラメータ（負債、株主資本、実効税率、節税効果）は、参考企業（類似の上場企業）のものであり、Re-lever するときに用いるパラメータは、対象となる非上場企業のものである。

事業価値を生み出す源泉たる投資家からの投資を、有利子負債D及び株主資本Eとし、事業価値をVとすると、以下の式が成立する。

$$V = D + E$$

右辺に有利子負債Dがあることから、一定の利息支払いが生じている筈である。その場合、支払利息に法人税率を乗じた分だけ法人税の支払いが減る効果（資産面でのプラス効果をい有むという節税効果）があるので、[180] これが左辺のVの中に混入している筈である。そこで、これを、V_{txa} として切り出してみる。すなわち、

$$V = V_u + V_{txa}$$

と分離してみる。V_u は、節税効果を生み出す負債に関わりのない価値部分（負債レバレッジのない企業価値部分）となるので、Unlevered の u を添え字とした。日本語にすると、上記式は、以下の意味を表している。

事業価値　＝　負債レバレッジなき価値部分　＋　負債利子節税効果

これを踏まえると、最初の式　$V = D + E$　は、以下のとおりとなる。[181] [182]

$$V_u + V_{txa} = D + E$$

この式は、以下のとおりに変形できる。

$$\frac{V_u + V_{txa}}{V_u + V_{txa}} = \frac{D + E}{D + E}$$

$$\frac{V_u}{V_u + V_{txa}} + \frac{V_{txa}}{V_u + V_{txa}} = \frac{D}{D + E} + \frac{E}{D + E}$$

これは、一単位投資額（例：１円）あたりの、事業価値（左辺）＝投資源泉（右辺）における各要素の比率を示している。日本語にすれば、以下の意味を表している。

---

180 節税効果を享受するためには、それを上回る利益があることが前提である。債務不履行の確率が高い状況下では、支払条件に規定された支払利息に基づく節税効果は使わず、別途、その企業の債務不履行の確率を加味して、節税効果を算定する（債務不履行の確率が上がると、節税効果を下げる）。参考文献Ａ上巻１９０～１９１頁。

181 Franco Modigliani, Merton H. Miller. 1963. Corporate Income Taxes and the Cost of Capital. The American Economic Review Vol. 53, No. 3, pp. 433-443. http://www.jstor.org/stable/1809167

182 参考文献Ｄ２６５頁

$$負債レバレッジなき価値部分事業価値 + 負債利子節税効果事業価値 = \frac{負債}{総投資} + \frac{株主資本}{総投資}$$

この式をβを含んだ式に変換したい。

ここで、各種資産をセットにしたもののβ（市場利回変動との連動度）は、その各要素の資産のβの加重平均に等しいことに着目する。すなわち、ある資産セットPが、種類１～３の資産から構成されている場合、各々の経済的価値をV_1 、V_2 等と表現すれば、合計資産セットPの価値V_P は、

$$V_P = V_1 + V_2 + V_3$$

となる。そして、この種類１～３の資産は、安全だが利回りは低い投資資産（例：日本国債）であったり、危険ではあるが首尾よく回収できれば利回りは高い投資資産（例：冒険的企業の株式）であったりする。各々の資産には固有のβ値がある。それを、資産１についてはβ_1 、資産２についてはβ_2 等と表記することにする。各構成資産の総体がPであることからすれば、各資産のβを加重平均すれば、資産セットＰのベータすなわちβ_P となる筈である。これを式にすると、以下のとおりである。

$$\beta_P = \frac{V_1}{V_1 + V_2 + V_3}\beta_1 + \frac{V_2}{V_1 + V_2 + V_3}\beta_2 + \frac{V_3}{V_1 + V_2 + V_3}\beta_3$$

すなわち、以下の関係が成立している。

$$V_P = V_1 + V_2 + V_3 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_P = \frac{V_1}{V_1 + V_2 + V_3}\beta_1 + \frac{V_2}{V_1 + V_2 + V_3}\beta_2 + \frac{V_3}{V_1 + V_2 + V_3}\beta_3$$

この関係を、現在検討している、

$$V = V_u + V_{txa}$$

について当てはめてみれば、

$$V = V_u + V_{txa} \quad \Leftrightarrow \quad \beta_V = \frac{V_u}{V_u + V_{txa}}\beta_u + \frac{V_{txa}}{V_u + V_{txa}}\beta_{txa}$$

・β_V　…　全体のβ
・β_u　…　負債レバレッジなき価値部分のβ
・β_{txa}　…　負債利子節税効果のβ

ということになる。

これと同様の議論は、投資（負債・株主資本）のセットについても、妥当する（会社からみればコストであろうが、投資者から見ればリターンであるので)。

すなわち、総投資（すなわち事業価値）のβは、各投資のβの加重平均に等しい。これを式で示すと、以下のとおりである。

$$V = \frac{D}{D+E} + \frac{E}{D+E} \quad \Leftrightarrow \quad \beta_V = \frac{D}{D+E}\beta_d + \frac{E}{D+E}\beta_e$$

・β_d　…　負債のβ
・β_e　…　株主資本のβ

これら二式は、以下のとおり、いずれも左辺がβ_V である。

$$\begin{cases} \beta_V = \dfrac{V_u}{V_u + V_{txa}}\beta_u + \dfrac{V_{txa}}{V_u + V_{txa}}\beta_{txa} \\ \beta_V = \dfrac{D}{D+E}\beta_d + \dfrac{E}{D+E}\beta_e \end{cases}$$

よって、これら二式は、以下のとおり等置できる。[183]

$$\frac{V_u}{V_u + V_{txa}}\beta_u + \frac{V_{txa}}{V_u + V_{txa}}\beta_{txa} = \frac{D}{D+E}\beta_d + \frac{E}{D+E}\beta_e$$

この式を変形していけば、本書の目的であるβ 関係式（β_e→β_u）とその逆算 version である、β 関係式（β_u→β_e）を導けるはずだ。数学上は、Unlevered ↔ Levered の変換式の導出作業は同じことである。そこで、以下では、とりあえず、上記式を、β_e を求める一般解の形の式（β_u→β_e）にしてみる。

$$\frac{V_u}{V_u + V_{txa}}\beta_u + \frac{V_{txa}}{V_u + V_{txa}}\beta_{txa} = \frac{D}{D+E}\beta_d + \frac{E}{D+E}\beta_e$$

の両辺に、１４０頁の等式

$$V_u + V_{txa} = D + E$$

を乗ずると、

[183] 参考文献Ａ上巻の４７７頁では、この公式を起点に証明を開始している。参考文献Ｄ２６５頁。

$$(V_u + V_{txa})\frac{V_u}{V_u + V_{txa}}\beta_u + (V_u + V_{txa})\frac{V_{txa}}{V_u + V_{txa}}\beta_{txa} = (D + E)\frac{D}{D + E}\beta_d + (D + E)\frac{E}{D + E}\beta_e$$

$$V_u\beta_u + V_{txa}\beta_{txa} = D\beta_d + E\beta_e$$

$$V_u\beta_u - D\beta_d + V_{txa}\beta_{txa} = E\beta_e$$

$$\frac{V_u\beta_u - D\beta_d + V_{txa}\beta_{txa}}{E} = \beta_e$$

$$\beta_e = \frac{V_u\beta_u - D\beta_d + V_{txa}\beta_{txa}}{E}$$

$$\beta_e = \frac{V_u\beta_u}{E} - \frac{D\beta_d}{E} + \frac{V_{txa}\beta_{txa}}{E}$$

となる。

ここで、右辺のV_u を消去すべく、先ほどの式を

$$V_u + V_{txa} = D + E$$

$$V_u = D - V_{txa} + E$$

としたものを代入すると、β_e は、

$$\begin{aligned}
\beta_e &= \frac{V_u\beta_u}{E} - \frac{D\beta_d}{E} + \frac{V_{txa}\beta_{txa}}{E} \\
&= \frac{(D - V_{txa} + E)\beta_u}{E} - \frac{D\beta_d}{E} + \frac{V_{txa}\beta_{txa}}{E} \\
&= \frac{D\beta_u}{E} + \frac{-V_{txa}\beta_u}{E} + \frac{E\beta_u}{E} - \frac{D\beta_d}{E} + \frac{V_{txa}\beta_{txa}}{E} \\
&= \frac{D\beta_u}{E} + \frac{-V_{txa}\beta_u}{E} + \beta_u - \frac{D\beta_d}{E} + \frac{V_{txa}\beta_{txa}}{E} \\
&= \beta_u + \frac{D\beta_u}{E} - \frac{D\beta_d}{E} + \frac{-V_{txa}\beta_u}{E} + \frac{V_{txa}\beta_{txa}}{E} \\
&= \beta_u + \frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d) - \frac{V_{txa}}{E}(\beta_u - \beta_{txa})
\end{aligned}$$

となる。この式は、β変換（β_u→β_e）の一般式である。しかし、上記式に出てくるβ_{txa} については、観念上は、負債利子節税効果のβ（市場利回変動との連動度）と整理されるものの、どこかに実測数値があるわけではない。このため、このままでは、β_e を具体的数字として求められない。そこで、以下では、β_{txa} について、いくつかの仮設前提をおいてみて、上記式を更に整理してみた。

（仮設前提その１）

仮に、上記β_e を求める式において、

$$\beta_{txa} = \beta_u$$

と仮定した場合（これは節税効果と Unlevered 株式の対市場連動度が同程度であることを意味する）、上記β_e を求める式は、以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned}\beta_e &= \beta_u + \frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d) - \frac{V_{txa}}{E}(\beta_u - \beta_{txa}) \\ &= \beta_u + \frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d) - \frac{V_{txa}}{E}(\beta_u - \beta_u) \\ &= \beta_u + \frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d) - \frac{V_{txa}}{E} \times 0 \\ &= \beta_u + \frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d)\end{aligned}$$

すなわち、この式を使えば、対象となる非上場企業の有利子負債D、株主資本E、有利子負債コストβ_d が分かれば、類似上場企業の負債除外調整をした株式ベータ値β_u から、対象非上場企業の株式ベータ値β_e が計算できる。[184]

同式は、以下の公式比較表では、左上（１行１列目）の公式に相当する。[185]

	有利子負債の額は変動するとの前提	有利子負債の額は一定であるとの前提	
		有利子負債にリスクあり	有利子負債は無リスク
節税効果とそれ以外の事業価値のリスクが同等との前提 $\beta_{txa} = \beta_u$	$\beta_e = \beta_u + \frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d)$	$\beta_e = \beta_u + \frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d)$	$\beta_e = (1 + \frac{D}{E})\beta_u$
節税効果と有利子負債のリスクが同等との前提 $\beta_{txa} = \beta_d$	$\beta_e = \beta_u + \frac{D - V_{txa}}{E}(\beta_u - \beta_d)$	$\beta_e = \beta_u + (1-T)\frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d)$	$\beta_e = \left\{1 + (1-T)\frac{D}{E}\right\}\beta_u$

また、この式をβ_u について解けば、類似上場企業の株式ベータ値β_e から、類似上場企業の負債除外調整をした株式ベータ値β_u を求める式を導出できる。すなわち、

184 Harris-Pringle(1985)、Ruback(1995)による提唱式。

185 この公式比較表は、各種前提の違いによる公式の違いを比較したものである。参考文献Ａ上巻４７８頁の表を参考にした。

$$\beta_e = \beta_u + \frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d)$$

$$\beta_e = \beta_u + \frac{D}{E}\beta_u - \frac{D}{E}\beta_d$$

$$\beta_e + \frac{D}{E}\beta_d = \beta_u + \frac{D}{E}\beta_u$$

$$\beta_e + \frac{D}{E}\beta_d = \left(1 + \frac{D}{E}\right)\beta_u$$

$$\left(1 + \frac{D}{E}\right)\beta_u = \beta_e + \frac{D}{E}\beta_d$$

$$(E + D)\beta_u = E\beta_e + D\beta_d$$

$$\beta_u = \frac{E\beta_e + D\beta_d}{E + D}$$

と式変形ができるので、類似上場企業の有利子負債D、株主資本E、有利子負債コストβ_d が分かれば、株式ベータ値β_e （このβ_e は過去の株価資料を基にした回帰分析により求めることができる。[186] ）から、類似上場企業の負債除外調整をした株式ベータ値β_u が計算できる

（仮設前提その２）

他方で、別の仮設前提も考えられる。すなわち、上記β_e を求める式において、

$$\beta_{txa} = \beta_d$$

と仮定した場合は（これは節税効果と有利子負債の対市場連動度が同程度であることを意味する）、上記β_e を求める式は、以下のとおりとなる。

$$\beta_e = \beta_u + \frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d) - \frac{V_{txa}}{E}(\beta_u - \beta_{txa})$$

$$= \beta_u + \frac{D}{E}(\beta_u - \beta_d) - \frac{V_{txa}}{E}(\beta_u - \beta_d)$$

$$= \beta_u + \left(\frac{D}{E} - \frac{V_{txa}}{E}\right)(\beta_u - \beta_d)$$

$$= \beta_u + \frac{D - V_{txa}}{E}(\beta_u - \beta_d)$$

[186] Excel を使った実例として、「２０　トヨタ自動車のβ値」参照。

この式を使えば、対象となる非上場企業の有利子負債D、株主資本E、節税効果V_{txa} 及び有利子負債コストβ_d が分かれば、類似上場企業の負債除外調整をした株式ベータ値β_u から、対象非上場企業の株式ベータ値β_e が計算できる。[187]

この式についても、β_u について解くことで、類似上場企業の株式ベータ値β_e から、類似上場企業の負債除外調整をした株式ベータ値β_u を求める式を導出できる。すなわち、

$$\beta_e = \beta_u + \frac{D - V_{txa}}{E}(\beta_u - \beta_d)$$

$$\beta_e = \beta_u + \frac{D - V_{txa}}{E}\beta_u - \frac{D - V_{txa}}{E}\beta_d$$

$$\beta_e + \frac{D - V_{txa}}{E}\beta_d = \beta_u + \frac{D - V_{txa}}{E}\beta_u$$

$$\beta_e + \frac{D - V_{txa}}{E}\beta_d = \left(1 + \frac{D - V_{txa}}{E}\right)\beta_u$$

$$\left(1 + \frac{D - V_{txa}}{E}\right)\beta_u = \beta_e + \frac{D - V_{txa}}{E}\beta_d$$

$$(E + D - V_{txa})\beta_u = E\beta_e + (D - V_{txa})\beta_d$$

$$\beta_u = \frac{E\beta_e + (D - V_{txa})\beta_d}{E + D - V_{txa}}$$

と式変形をすれば、類似上場企業の株式ベータ値β_e （このβ_e は過去の株価資料を基にした回帰分析により求める）から、類似上場企業の負債除外調整をした株式ベータ値β_u が計算できる。

上記二つの仮設前提のいずれが事業価値評価の在り方として適切かについては、論者によって意見は様々であり、確たる定見はない。[188] [189]

ちなみに、日本公認会計士協会の推奨する方式は、上記二つの仮設前提のうち、仮設前提その２のもの（節税効果と有利子負債の対市場連動度が同程度との仮設前提）に立ったうえで、更なる追加前提として、以下の２点を加えたものである。[190]

（A）有利子負債の残高は変化しない

（B）有利子負債はリスク・フリーとする

---

[187] Myers(1974)による提唱式。上記公式比較表では、左下（２行１列目）に相当する。

[188] 代表的な公式を分類・整理したものとして、Pablo Fernández「LEVERED AND UNLEVERED BETA」2003(revised 2006) University of Navarra - IESE Business School　http://www.iese.edu/research/pdfs/DI-0488-E.pdf

[189] 参考文献Ｄ２６５～２６６頁では、上記表の右上と右下の両式を提示している。

[190] Damodaran(1994)による提唱式。上記公式比較表では、右下（２行・３列目）の公式に相当する。

これら前提を具体的にみると、以下のとおりである。

先ず、（A）有利子負債の残高が変化しないというのは、具体的には、有利子負債が増加もしないし減少もせず、利息だけを毎期一定額を支払い続ける（いわゆる元本の残高維持、ないしは旧社債・借入金を償還すると同時に同額同条件の社債発行・借入をおこなう）という、資本・負債政策を堅持する企業を想定している。このような前提の場合、V_{txa} （負債利子の節税効果）は、以下のように計算できる。すなわち、毎期の支払利息は、有利子負債（すなわち元本）D に有利子負債コスト（すなわち利率）k_d を乗じた金額Dk_d であるところ、これに限界税率であるT を乗じた金額が、節税効果（法人税減少額）Dk_dT であるから、このような節税効果が毎期に永遠に生ずるものとした場合の積算合計額の現在価値は、「５　永続価値（第１～第∞の各事業年度のフリー・キャッシュ・フローの合計）」の式と同様に考えて、

$$V_{txa} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Dk_dT}{(1+k_d)^n}$$

$$= \frac{Dk_dT}{k_d}$$

$$= DT$$

となる。よって、数式上は、以下の条件を、仮設前提その２の公式に代入すれば良い。

$$V_{txa} = DT$$

次に、（B）有利子負債はリスク・フリーとするとの前提は、具体的には、社債の利回りが社債市場の利回り変動に追随することはなく、あたかも国債と同様、社債の約定金利支払いと元本償還が発行会社から確実に実施されるという、堅実な上場企業を想定している。数式上は、以下の条件を、仮設前提その２の公式に代入すれば良い。

$$\beta_d = 0$$

以上の（A）及び（B）ふたつの前提を数式として、仮設前提その２の公式に代入した結果は、以下のとおりとなる。

$$\beta_e = \beta_u + \frac{D - V_{txa}}{E}(\beta_u - \beta_d)$$

$$= \beta_u + \frac{D - DT}{E}(\beta_u - 0)$$

$$= \beta_u + \frac{D - DT}{E}\beta_u$$

$$= \beta_u + \frac{D(1-T)}{E}\beta_u$$

$$= \beta_u \left(1 + \frac{D(1-T)}{E} \right)$$

$$= \beta_u \left\{ 1 + (1-T)\frac{D}{E} \right\}$$

この式では、対象となる非上場企業の有利子負債D、株主資本E、実効税率T が分かれば、類似上場企業の負債除外調整をした株式ベータ値β_u から、対象非上場企業の株式ベータ値β_e が計算できる。[191]

この式についても、β_u について解くことで、類似上場企業の株式ベータ値β_e から、類似上場企業の負債除外調整をした株式ベータ値β_u を求める式を導出できる。すなわち、

$$\beta_e = \beta_u \left\{ 1 + (1-T)\frac{D}{E} \right\}$$

$$\beta_u \left\{ 1 + (1-T)\frac{D}{E} \right\} = \beta_e$$

$$\beta_u = \frac{\beta_e}{1 + (1-T)\frac{D}{E}}$$

との式により、類似上場企業の株式ベータ値β_e （このβ_e は過去の株価資料を基にした回帰分析により求める）、類似上場企業の有利子負債D、株主資本E、実効税率T を用いて、類似上場企業の負債除外調整をした株式ベータ値β_u を計算しうる。[192]

このほか、６４頁で述べたとおり、非上場会社への投資家は、分散投資をおこなわない人もいる（経営者や親族による私財投入。株主が経営にフル・コミット）。このような中小規模の閉鎖型企業は、マーケット・ポートフォリオのリスク分散効果[193] が全くない。そうすると、１１３頁で紹介したβ式（相関係数ρを用いた表現）、

$$\beta = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

・ σ_y … 個別株式の標準偏差

---

[191] 参考文献Ｃの７５～７６頁では、いずれの会社のベータ値であるか混同をしないようにするため、別途の記号を付けている。すなわち、β_x を求めたい対象の非上場会社のベータ値と表示し、β^* を類似上場企業の負債除外調整をした株式ベータ値と表示している。

[192] この方式は、負債のベータが実際には０でない場合には、正確な数値は出ない。参考文献Ｃの７５頁でも、負債のベータがプラスであるような場合は、無負債ベータを過小評価することになる旨の補足注意がなされている。

[193] 本書１２３頁のとおり、複数口に投資すると、単独投資よりも収益率の分散が減少する効果のこと（安全確実度が増す）。

- σ_x … 市場全体の標準偏差
- ρ … 相関関数

のうち、

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

の部分は、個別銘柄株式のマーケット・ポートフォリオに対する分散リスクの比率（ばらつき度の比率）であるから残すとしても、

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

の部分は、それ以外の要素（すなわち、マーケット・ポートフォリオをリスク分散させる分の効果）と見ることができるから、このρ については、（現在の投資家が分散投資を全くおこなわず、投資先の全リスクを負担していると評価できるような）非上場上企業のβ値算定には、計算式に入れないのが適当である。このような修正後のβをトータルβと呼び、[194] これを計算式で示すと、

$$\begin{aligned} total\,\beta &= \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \\ &= \frac{1}{\rho}\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \\ &= \frac{\beta}{\rho} \end{aligned}$$

となる。例えば、CAPM での計算上、β＝１．５　となる企業であっても、相関係数が０．４と観測されている場合、トータルβは、以下のようになる。

$$\begin{aligned} total\,\beta &= \frac{\beta}{\rho} \\ &= \frac{1.5}{0.4} \\ &= 3.75 \end{aligned}$$

　ベータ値が大きくなれば、r_i すなわちk_e も大きくなり（５７～５８頁）、$WACC$ も大きくなるので（４１頁）、割り引いた企業の評価額はその分だけ小さくなる。

[194] 参考文献Ｄ２８５～２８６頁。

なお、ベンチャー企業に DCF 法を適用する際の割引率は、ベンチャー・キャピタル等の投資家による期待利回り（数十％にもなる例あり）が適切であるとする見解もある。この場合も、割り引いた企業の評価額は相当程度小さくなる。[195]

以上のとおり、Unlevered ↔ Levered の式が導出できたので、参考までに、具体的数字で、日本公認会計士協会の推奨する公式の適用結果を確認してみる。例えば、類似上場企業として、トヨタ自動車株式会社を採ると、同社の基礎数値は以下のとおりである（DE に用いる数字については、詳しくは後述するが、ここでは取り敢えず公表時価を採用した）。

・株式β	…	１．１５	([196]
・有利子負債の時価 D	…	１９，１５５，７２７百万円	([197]
・株主資本の時価 E	…	（１株あたり）７１５５円	（１１月２日終値）
		×３，２６２，９９７，４９２株	([198]
		２３，３４６，７４７百万円	
・実効税率 T	…	２９．７４％	([199]

この場合、負債除外調整をした株式ベータ値β_u は以下のとおり計算される。

$$\beta_u = \frac{\beta_e}{1+(1-T)\frac{D}{E}}$$

$$= \frac{1.15}{1+(1-0.2974)\frac{19{,}155{,}727}{23{,}346{,}747}}$$

$$= 0.73$$

下記表は、Excel での計算例である。

[195] PLUTUS＋ MEMBER’S REPORT No.67「ベンチャー企業の株式価値評価に関する論点整理」(October 30,2015)
[196] 日本経済新聞ＨＰ「β（ベータ）値高位ランキング」自動車 https://www.nikkei.com/markets/ranking/page/?bd=betahigh&Gcode=27&hm=1
[197] ロイターＨＰ https://jp.reuters.com/investing/stocks/balance-sheet/7203.T
[198] Yahoo Japan Finance 時価総額上位 https://info.finance.yahoo.co.jp/ranking/?kd=4
[199] 財務省ＨＰ「法人課税に関する基本的な資料」 http://www.mof.go.jp/tax_policy/summary/corporation/c01.htm

TOYOTA	
株式β	1.15
有利子負債	19,155,727,000,000
株価	7,155
株式数	3,262,997,492
株主資本時価	23,346,747,055,260
実効税率	29.74%
Unlevered β	0.73

この Unlevered 化した値β_u を前提に、対象となる非上場企業の株式βを求めてみる。例えば、（日本の自動車メーカーで非上場という現実味の乏しい架空想定であるが）、以下のような非上場企業Ａ社があるとする。

・有利子負債の時価 D　…　　２０００億円
・有利子負債のコスト　…　　２％
・株主資本の時価 E　…　　１０００億円

この場合、Ａ社の株式βは、以下のとおり求められる。

$$\beta_e = \beta_u \left\{1 + (1 - T)\frac{D}{E}\right\}$$

$$= 0.73\left\{1 + (1 - 0.2974) \times \frac{2000}{1000}\right\}$$

$$= 1.7545 \ldots$$

このように、非上場企業であっても株式βとして約１．７５を求めることができる。株式βが判明すれば、これを基に、株主資本コスト k_e ひいては割引率 *WACC* を次々と求めることができる。例えば、上記Ａ社の事業価値を評価する時点において、

リスク・フリー・レート（ r_f ）　…　１％　[200]
マーケット・リスク・プレミアム（ $r_m - r_f$ ）…　７％

とすると（なお、リスク･プレミアム等の情報は有償で配布もされている[201] [202]）、株主

---

[200] 日本銀行「金融経済月報」の「金融１３」、「１．市場金利等（３）」に国債新発債流通利回の数値（１９９７年以降～現在）が掲載されており、例えば、２０１７年９月分の国債１０年については、年０．０６％とされている。
http://www.boj.or.jp/statistics/pub/sk/data/sk2.pdf

[201] Ibbotson Associates 資本コスト関連データ
http://www.nikkeimm.co.jp/profile/ibbotsondata/index.html

資本コスト $k_e(=r_i)$は、以下のように計算して、

$$\begin{aligned} r_i - r_f &= \beta_e(r_m - r_f) \\ r_i - 0.01 &= 1.75 \times 0.07 \\ r_i &= 0.01 + 1.75 \times 0.07 \\ &= 0.1325 \end{aligned}$$

として、$k_e =$ 約１３．２５％と算出される。これを前提とすると、割引率 $WACC$ は、

$$\begin{aligned} WACC &= \frac{D}{D+E}(1-T)k_d + \frac{E}{D+E}k_e \\ &= \frac{2000}{2000+1000}(1-0.2974) \times 0.02 + \frac{1000}{2000+1000} \times 0.1325 \\ &= \frac{2}{3} \times 0.7026 \times 0.02 + \frac{1}{3} \times 0.1325 \\ &= 0.05353 \ldots \end{aligned}$$

として、$WACC =$ 約５．３５％と求めることができる。

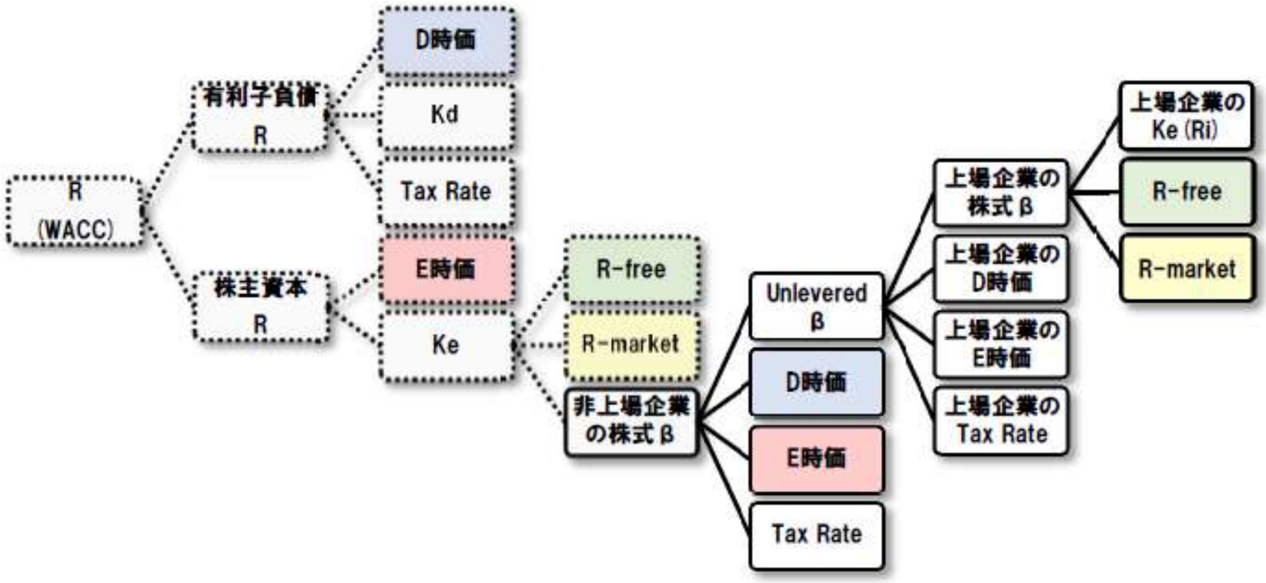
下記表は、Excel での計算例である。

A社	有利子負債	200,000,000,000
	金利	2%
	株主資本時価	100,000,000,000
	株式β	1.7500
	株主資本コストke	13.25%
	WACC	5.35%

rf	1%
rm-rf	7%

[202] TOPIXβVALUE 全上場企業
http://db-ec.jpx.co.jp/item/BETA20160601.html

結局、非上場企業の株式βを求めるための要素は、以下の図解のとおり整理される。

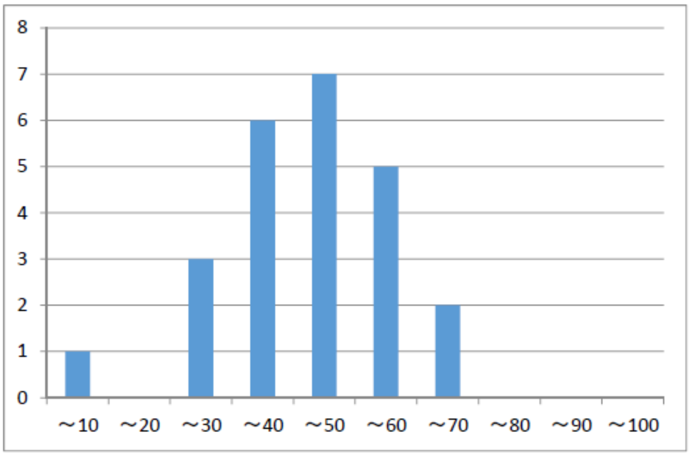


実際の計算作業としては、右側の要素を集めて、公式に代入して計算し、随時、左側の要素を求めて行くとう手順になる。

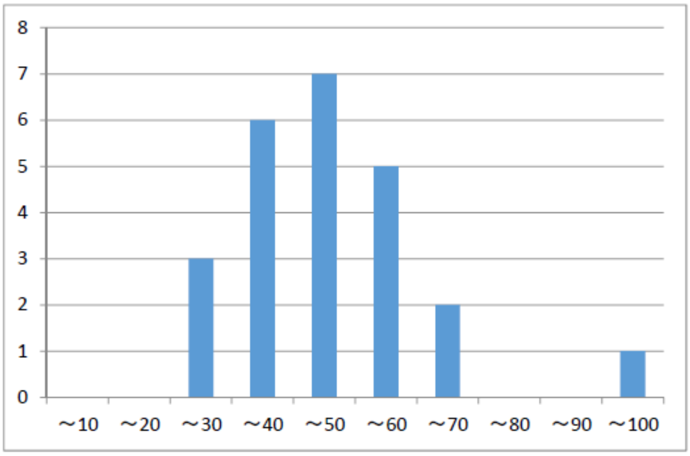
なお、冒頭の流れ図のとおり（１３９頁）、収集する類似上場会社は複数を用いることで判断の合理性を高めることが望ましい。その場合、類似企業としてβ値を集める範囲をどのようにするか（社数、範囲）は、別途、考慮が必要である。

また、上場各社の Unlevered 化した株式β値について、平均値をとるべきか、中央値[203]をとるべきかも、検討対象事項である。この点、下記図表のとおり、ほぼ同じデータ群であるＡ群とＢ群を比較してみると、２４個のデータのうち黄色部分（Ａ群では０点、Ｂ群では１００点）のような集団から遠い外れ値が１つある。この影響は、平均値では４．２の差として現れるのに対して、中央値は１の差しか受けない。件数の少ない異常値による影響を排除する観点からは、Unlevered 化した株式β値については、中央値を用いることが提唱されている。[204]

A群				区間	頻度
32	35	55		～10	1
43	65	55		～20	0
42	35	55		～30	3
35	65	58		～40	6
45	0	30		～50	7
55	45	21		～60	5
35	44	33		～70	2
41	48	27		～80	0
				～90	0
	平均値	41.6		～100	0
	中央値	42.5			
	最頻値	35.0			



B群				区間	頻度
32	35	55		～10	0
43	65	55		～20	0
42	35	55		～30	3
35	65	58		～40	6
45	100	30		～50	7
55	45	21		～60	5
35	44	33		～70	2
41	48	27		～80	0
				～90	0
	平均値	45.8		～100	1
	中央値	43.5			
	最頻値	35.0			



203 中央値は、データを大小順に並べたときの中央の値。データの数が偶数のときは、そのような値が２つあるので、それらを足して２で割ったもの。Excel では、MEDIAN 関数で計算できる。

204 参考文献Ａ上巻の３５０頁

２６　有利子負債コスト　k_d

有利子負債コストは、本来は、期待リターンであるが、概算数値としては、当該企業の長期社債の税引後最終利回りを用いる（利子が遅滞なく支払われ、元本も全額返済されることを前提とする）。[205]　この最終利回りは、債券価格等から算出することができる。

- $Price$　…　債券価格
- $Face$　…　額面価格
- $Coupon$　…　毎期の利払額
- N　…　償還年数
- YTM　…　最終利回り

とすると、単純に考えれば、１年あたり総収入を債券購入価格で割ったのが利回りだから、

$$YTM = \frac{Coupon + \frac{Face - Price}{N}}{Price}$$

となるが、現在価値を考慮する必要があるので、そう単純にはいかない。ここで、１年後支払われる利払額の現在価値は、

$$\frac{Coupon}{1 + YTM}$$

であり（９頁参照）、N 年後に支払われる利払額の現在価値は、

$$\frac{Coupon}{(1 + YTM)^N}$$

であり（１１頁参照）、N 年後に支払われる元本（額面価格）の現在価値は、

$$\frac{Face}{(1 + YTM)^N}$$

である。
これら１年後から N 年後までの約定金利ベースのキャッシュ・フローの現在価値の合計を前提に、市場で債券の売買がされているのだから、債券価格は、以下のとおりである。

$$Price = \frac{Coupon}{1 + YTM} + \frac{Coupon}{(1 + YTM)^2} + \cdots + \frac{Coupon}{(1 + YTM)^{N-1}} + \frac{Coupon}{(1 + YTM)^N} + \frac{Face}{(1 + YTM)^N}$$

---

[205] 参考文献Ａ上巻３２７頁、３５３頁。

この式を、最終利回り YTM について、解けばよい。[206]
しかし、このような複雑な式を、「YTM　＝」の形に変形できるだろうか。
ここで式を見やすくするために、

$$x = 1 + YTM$$
$$C = Coupon$$

と表記することにすると、上記 $Price$ 式は、以下のようになる。

$$Price = \frac{C}{x} + \frac{C}{x^2} + \cdots + \frac{C}{x^{N-1}} + \frac{C}{x^N} + \frac{Face}{x^N}$$

上記式の両辺に、x^N を乗じると、

$$\begin{aligned} Price \times x^N &= \frac{C}{x}x^N + \frac{C}{x^2}x^N + \cdots + \frac{C}{x^{N-1}}x^N + \frac{C}{x^N}x^N + \frac{Face}{x^N}x^N \\ &= Cx^{N-1} + Cx^{N-2} + \cdots + Cx + C + Face \\ 0 &= -Price \times x^N + Cx^{N-1} + Cx^{N-2} + \cdots + Cx + C + Face \end{aligned}$$

と整理され、一元 N 次方程式の形となる。ここで、５次以上の方程式の解を求める一般公式は存在しないとされていることから、[207]　上記を x について一般的に解く（すなわち YTM について解く）ことはできない。例えば１５頁で証明した等比数列の和の公式をみると、

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \\ &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \end{aligned}$$

が成立しているので、これを使って何とかならないか試してみる。上記 $Price$ 式を以下のように変形してみると、初項 $a=1$ で、公比$r = x$ の等比数列の和となっていることがわかるので、等比数列の和の公式を適用して、…のない形に変形することまでは可能である。

$$\begin{aligned} 0 &= -Price \times x^N + Cx^{N-1} + Cx^{N-2} + \cdots + Cx + C + Face \\ Price \times x^N &= C(x^{N-1} + x^{N-2} + \cdots + x + 1) + Face \\ &= C(1 + x + \cdots + x^{N-2} + x^{N-1}) + Face \\ &= C \times \frac{1(1-x^N)}{1-x} + Face \end{aligned}$$

206　参考文献Ａ上巻３５４頁
207 アーベル-ルフィニの定理（本書では証明をしない）

$$= \frac{C(1 - x^N)}{1 - x} + Face$$
$$Price(1 - x)x^N = C(1 - x^N) + Face(1 - x)$$

このように、式は簡単になったが、依然として、x について解けたわけではない。
そこで、以下では、解の公式化は諦めて、他の方法で x、ひいては *YTM* の値を具体的に求める方策を検討する。ここで、上記の *price* 式

$$0 = -Price \times x^N + Cx^{N-1} + Cx^{N-2} + \cdots + Cx + C + Face$$

の右辺を、x についての関数とみて、*f(x)*と置く。すなわち、

$$f(x) = -Price \times x^N + Cx^{N-1} + Cx^{N-2} + \cdots + Cx + C + Face$$

とする。求めるべき x は、$f(x) = 0$ となるような x である。具体的なイメージを掴むために、以下の設例に基づき、仮に数字を入れてみる。

（設例）*N*　＝10　（社債 10 年満期）
Face　＝100 万円　（額面元本 100 万円）
Coupon　＝1 万 9000 円／毎年
Price　＝100 万 7370 円　（社債の発行価格）
YTM　＝不明　（1 年複利ベースの利回り）

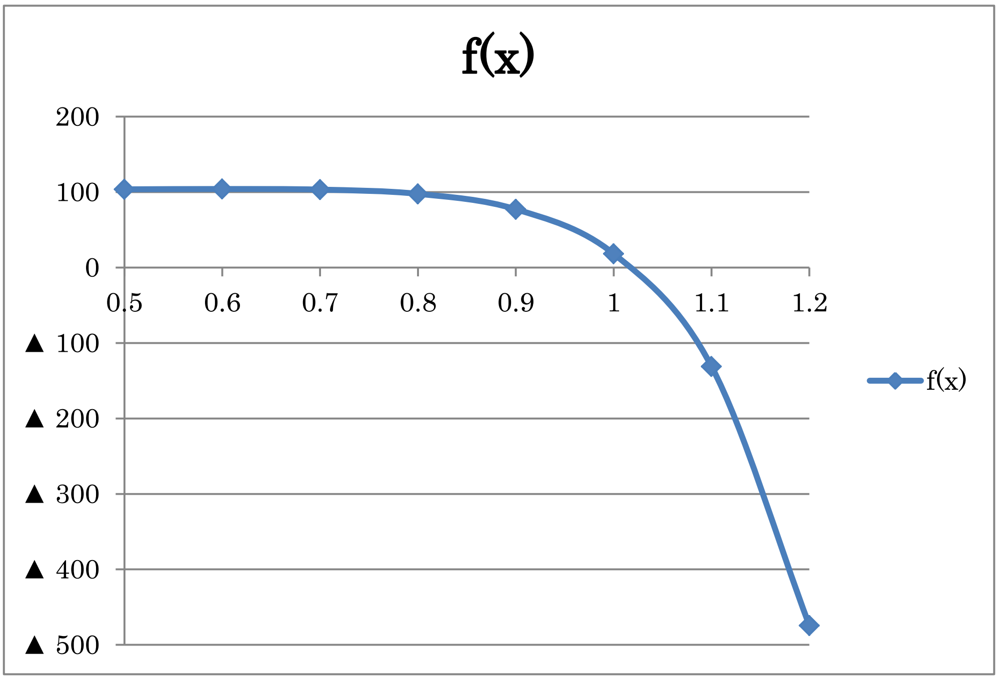
この設例の場合、$x = 1 + YTM$ とおくと、 $f(x)$ は、以下のようになる（単位：万円）。

$$f(x) = -100.737x^{10} + 1.9x^9 + 1.9x^8 + \cdots + 1.9x + 1.9 + 100$$
$$= -100.737x^{10} + 1.9x^9 + 1.9x^8 + \cdots + 1.9x + 101.9$$

この$f(x)$ は、x の値次第で、以下の表にあるとおり様々な値をとる。ここで知りたいのは、$f(x)$ が丁度 0 になるときの x の値である。

べき乗	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
係数	▲100.7	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	101.9	f(x)
x	x^10	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	
0.5	▲0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.2	0.5	1.0	101.9	104
0.6	▲0.6	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.4	0.7	1.1	101.9	104
0.7	▲2.8	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1.3	101.9	103
0.8	▲10.8	0.3	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	101.9	98
0.9	▲35.1	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.4	1.5	1.7	101.9	77
1	▲100.7	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	101.9	18
1.1	▲261.3	4.5	4.1	3.7	3.4	3.1	2.8	2.5	2.3	2.1	101.9	▲131
1.2	▲623.7	9.8	8.2	6.8	5.7	4.7	3.9	3.3	2.7	2.3	101.9	▲474

表から観察する限り、x が１から１．１のあたりで、$f(x)$ が０となりそうである。そこで、これをグラフに書いてみる。



正確な値はまだ不明であるが、x が１を少し過ぎあたりの数字のときに、$f(x)$ は０を横切りそうである。そこで、試しに、x に１．０２を代入してみると

$$
\begin{aligned}
f(1.02) &= -100.737 \times 1.02^{10} + 1.9 \times 1.02^{9} + 1.9 \times 1.02^{8} + \cdots + 1.9 \times 1.02 + 101.9 \\
&= -1.993 \ldots
\end{aligned}
$$

となり、０に満たない（マイナス値）ことが分かる。次に、x に１を代入してみると、

$$
\begin{aligned}
f(1) &= -100.737 \times 1^{10} + 1.9 \times 1^{9} + 1.9 \times 1^{8} + \cdots + 1.9 \times 1 + 101.9 \\
&= 18.263 \ldots
\end{aligned}
$$

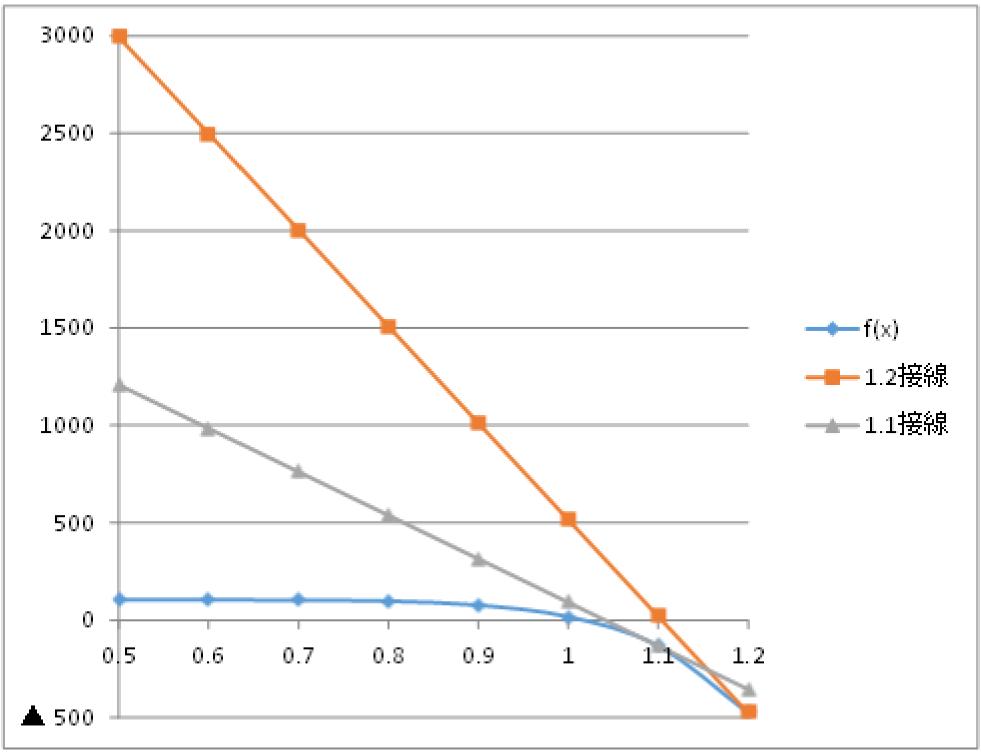
となり、今度は、０を通り越してしまって、プラスになる。このように手作業で次候補を適宜定めて入力し、ちょうど $f(x)$ が０となる場面に出会うまで根気よく作業を続けても良いのだが、いかにも面倒である。匙加減を間違えると、０を通り過ぎてしまう。そこで、できるなら、適当な地点 x_1（２でも１．２でも最初は多少遠くてもよいので）から出発して、$f(x)$ が０を通り過ぎない程度の x を次の x_2 候補に選び、$x_3, x_4\ldots$ と続けていき、$f(x)$ が０となる地点まで機械的・自動的に近づいていく仕組みを開発したい。（そうすれば、作業自体は電子計算機に実行させることができる）。以下、そのような仕組みを考えてみる。

先ずは、どこの点でも良いので、グラフ右端の $x=1.2$ を起点に考えてみる。x に１．２を

代入したときの$f(x)$ の値は、以下の Excel 計算表に記載のとおり、▲474 と計算できる。

べき乗	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	f(x)
係数	▲100.7	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	101.9	
x	x^10	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1.0	
1.2	▲623.7	9.8	8.2	6.8	5.7	4.7	3.9	3.3	2.7	2.3	101.9	▲474

次に、その$f(x)$上の点（1.2, ▲474）における$f(x)$曲線に接する線の傾きを求める。[208] 直線は、通るべき 1 点の座標と傾きが分かれば、グラフ上に書くことができる。これを実際に書いてみると、以下のとおりとなる（1.2 接線＝赤色直線）。



この 1.2 接線と横軸目盛りの交点（x＝1.104）を次の x の候補とすれば、$f(x)$ が 0 を超えないように、マイナス側から$f(x) = 0$ へと近づいたことになる。

べき乗	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	f(x)
係数	▲100.7	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	101.9	
x	x^10	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1.0	
1.2	▲623.7	9.8	8.2	6.8	5.7	4.7	3.9	3.3	2.7	2.3	101.9	▲474
1.104	▲271.5	4.6	4.2	3.8	3.4	3.1	2.8	2.6	2.3	2.1	101.9	▲141
1.043	▲154.0	2.8	2.7	2.6	2.5	2.3	2.3	2.2	2.1	2.0	101.9	▲31

208 次頁に触れるとおり、接線の傾きは、$f(x)$ を x で微分した$f'(x)$ に x＝1.2 を代入した $f'(1.2)$ である。微分については、「１７　二変数関数と偏微分」で扱った。

次のステップも、上述したのと同様に、x に 1.104 を代入したときの$f(x)$ の値（＝▲141）を求め、その$f(x)$ 上の点（1.104, ▲141）における曲線に接する線の傾きを求め、接線を実際に書いてみる（1.1 接線＝緑色直線）。そして、この 1.1 接線と横軸目盛りの交点（x＝1.043）を次の x の候補とすれば、0 を超えないように、マイナス側から$f(x) = 0$ へと更に一歩近づいたことになる。以後、この作業を延々と繰り返せば、マイナス側から$f(x) = 0$ へと限りなく近づいていくことが可能である。[209]

以上が作業内容のイメージである。これを数式で示すと（Excel 表を自作するには、数式を自分で考えてセルに記入しなければいけないので数式が必要）、以下のとおりとなる。先ず、最初の候補 x を、x_1 とする。このときの$f(x)$ の値は、$f(x_1)$ となる。すなわち、曲線$f(x)$における最初の点の座標は、$(x_1, f(x_1))$ である。この点で曲線$f(x)$に接する接線の傾きとは、この点から x を少しだけ増加させたときの $f(x)$ の増加量と同じである。すなわち、数式では以下のとおり表現される。

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

この式の分母は、x の増加量が h であることを示しており、分子は $f(x)$ がその結果、$f(x_1)$ から $f(x_1+h)$ へと増加したことにより、その差分である$f(x_1+h)-f(x_1)$ だけ増加したことを示している。結局、この分数は、x を少しの h 増加させたときの $f(x)$ の増加量を示している。その左側についている $\lim\limits_{h\to 0}$ という記号は、そのような分数の中の h を限りなく小さい数字（すなわち０）にするという意味を表している。まとめると、上記の式は、点$(x_1, f(x_1))$ において、x を極微量だけ増加させたときの $f(x)$ の極微量な増加量、すなわち点$(x_1, f(x_1))$ における曲線（を顕微鏡で拡大してみた場合の）傾きを示している。そこに点$(x_1, f(x_1))$に接する形で同じ傾きで直線をひけば、傾きが同じなので、直線と曲線は交わらずに綺麗に接することになる（直線が曲線の中に喰いこんだりしない）。このため、上記式の右辺は、接線の傾きと同じと言える。そして、この正確に求めた接線の傾きは、以下のように表記される。

$$\frac{df(x_1)}{dx}$$

関数 $f(x)$ を x で微分した式を、ダッシュ記号を右肩に付して、$f'(x)$ と書く表記法のときは、$f'(x_1)$ とも表記できる。

このように、傾きがわかると、通過点は$f(x)$ の x に x_1 を代入した（x_1, $f(x_1)$）で求められるので、直線は一意に定まる。例えば、x,y 平面において、ある点の座標が（2,3）である場合、すなわち、

$$(x, y) = (2,3)$$

209 この手法は、ニュートン・ラフソン法（Newton-Raphson method）と呼ばれる。

であるとき、この点を通過する直線の傾きが、例えば４だとすると、直線の方程式は、以下のようになる。[210]

$$
\begin{aligned}
(y-3) &= 4(x-2) \\
y &= 4(x-2)+3 \\
y &= 4x-8+3 \\
y &= 4x-5
\end{aligned}
$$

今回の通過点$(x_1, f(x_1))$ 及び傾き $\frac{df}{dx}$ についても、同様に考えればよく、接線の方程式は、以下のようになる。

$$(y - f(x_1)) = \frac{df(x_1)}{dx}(x - x_1)$$

接線の方程式が判明したので、これと横軸（すなわち y=0）との交点の x 座標（x_2）も求めることができる筈である。具体的には、上式の y に０を代入すればよい。実際にやってみると、

$$(0 - f(x_1)) = \frac{df(x_1)}{dx}(x - x_1)$$

$$-f(x_1) = \frac{df(x_1)}{dx}(x - x_1)$$

$$-\frac{f(x_1)}{\frac{df(x_1)}{dx}} = x - x_1$$

$$x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{df(x_1)}{dx}} = x$$

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{df(x_1)}{dx}}$$

となる。

この式において、x_1 と$f(x_1)$ は、計算すれば具体的数字としてわかるから（１５７頁の例で言えば、(1.2, ▲474) である。)、後は、

$$\frac{df(x_1)}{dx}$$

210 直線は$(x,y)=(2,3)$を通るのであるから、直線の方程式は、(2,3)を入れても等式が成立する必要がある。この式も x に２、y に３を代入すれば両辺が０になって等式が成立している。また、傾きが４だというのであるから、x が１増えればそれに４をかけた分だけ y が増える関係にある。そこで、等式の右辺（x 側）に４をかけて直線の方程式を作成した。

が分かれば、x_2 を求めることができる。
そこで、これを具体的に求めてみると、

$$\frac{df(x_1)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

において、$f(x)$ の内容は以下のとおりであったから、

$$f(x)=-100.737x^{10}+1.9x^9+1.9x^8+\cdots+1.9x+101.9$$

この式において、x に $x{+}h$ を代入した式は、以下のとおりとなる。

$$f(x+h)=-100.737(x+h)^{10}+1.9(x+h)^9+1.9(x+h)^8+\cdots+1.9(x+h)+101.9$$

よって、$\lim_{h\to 0}$ の右側の分数の分子部分 $f(x+h)-f(x)$ は、以下の両式について、上式から下式を引き算して、h で割り、h に０を代入した式の x に x_1 を代入すれば良い。

$$\begin{aligned}f(x+h)&=-100.737(x+h)^{10}+1.9(x+h)^9+1.9(x+h)^8+\cdots+1.9(x+h)+101.9\\ f(x)&=-100.737x^{10}+1.9x^9+1.9x^8+\cdots+1.9x+101.9\end{aligned}$$

引き算を実行するためには、上式の１０乗や９乗などという高次項を、いったん全部展開しなければならない。もし、これを実行すると、最初の項の一部である $(x+h)^{10}$ を展開するだけでも、以下のように大変な作業となってしまう。

$$\begin{aligned}&(x+h)^{10}=(x+h)^8(x+h)^2\\ &=(x+h)^7(x+h)(x^2+2hx+h^2)\\ &=(x+h)^7(x^3+2hx^2+h^2x+hx^2+2h^2x+h^3)\\ &=(x+h)^7(x^3+3hx^2+3h^2x+h^3)\\ &=(x+h)^6(x+h)(x^3+3hx^2+3h^2x+h^3)\\ &=(x+h)^6(x^4+3hx^3+3h^2x^2+h^3x+hx^3+3h^2x+3h^3x+h^4)\\ &=(x+h)^6(x^4+4hx^3+4h^2x^2+4h^3x+h^4)\\ &=(x+h)^5(x+h)(x^4+4hx^3+4h^2x^2+4h^3x+h^4)\\ &=(x+h)^5(x^5+4hx^4+4h^2x^3+4h^3x^2+h^4x+hx^4+4h^2x^3+4h^3x^2+4h^4x+h^5)\\ &=(x+h)^5(x^5+5hx^4+8h^2x^3+8h^3x^2+5h^4x+h^5)\\ &=(x^5+5hx^4+8h^2x^3+8h^3x^2+5h^4x+h^5)(x^5+5hx^4+8h^2x^3+8h^3x^2+5h^4x+h^5)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^5(x^5+5hx^4+8h^2x^3+8h^3x^2+5h^4x+h^5) \\
&\qquad\qquad + 5hx^4(x^5+5hx^4+8h^2x^3+8h^3x^2+5h^4x+h^5) \\
&\qquad\qquad + 8h^2x^3(x^5+5hx^4+8h^2x^3+8h^3x^2+5h^4x+h^5) \\
&\qquad\qquad + 8h^3x^2(x^5+5hx^4+8h^2x^3+8h^3x^2+5h^4x+h^5) \\
&\qquad\qquad + 5h^4x(x^5+5hx^4+8h^2x^3+8h^3x^2+5h^4x+h^5) \\
&\qquad\qquad + h^5(x^5+5hx^4+8h^2x^3+8h^3x^2+5h^4x+h^5) \\
&= (x^{10}+5hx^9+8h^2x^8+8h^3x^7+5h^4x^6+h^5x^5) \\
&\qquad\qquad + (5hx^9+25h^2x^8+40h^3x^7+40h^4x^6+25h^5x^5+5h^6x^4) \\
&\qquad\qquad + (8h^2x^8+40h^3x^7+64h^4x^6+64h^5x^6+40h^6x^4+8h^7x^3) \\
&\qquad\qquad + (8h^3x^7+40h^4x^6+64h^5x^5+64h^6x^4+40h^7x^3+8h^8x^2) \\
&\qquad\qquad + (5h^4x^6+25h^5x^5+40h^6x^4+40h^7x^3+25h^8x^2+5h^9x) \\
&\qquad\qquad + (h^5x^5+5h^6x^4+8h^7x^3+8h^8x^2+5h^9x+h^{10}) \\
&= x^{10}+10x^9h+45x^8h^2+120x^7h^3+210x^6h^4+252x^5h^5+210x^4h^6+120x^3h^7+45x^2h^8 \\
&\qquad\qquad + 10xh^9+h^{10}
\end{aligned}
$$

この展開過程を、仮に、二項定理[211]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k} b^k$$

を用いて簡略化したとしても、

$$
\begin{aligned}
&(x+h)^{10} \\
&= {}_{10}C_{10}x^{10} + {}_{10}C_9x^9h + {}_{10}C_8x^8h^2 + {}_{10}C_7x^7h^3 + {}_{10}C_6x^6h^4 + {}_{10}C_5x^5h^5 + {}_{10}C_4x^4h^6 + {}_{10}C_3x^3h^7 \\
&\qquad\qquad + {}_{10}C_2x^2h^8 + {}_{10}C_1xh^9 + {}_{10}C_0h^{10} \\
&= x^{10}+10x^9h+45x^8h^2+120x^7h^3+210x^6h^4+252x^5h^5+210x^4h^6+120x^3h^7+45x^2h^8 \\
&\qquad\qquad + 10xh^9+h^{10}
\end{aligned}
$$

と展開した後、これに、-100.737 を乗じてようやく初項となる。同じような作業を９回繰り返すと、やっと、全項の展開等が完了する。次に、その式から、$-100.737x^{10}+1.9x^9+1.9x^8+\cdots+1.9x+101.9$　を引き、それを分子としたうえで、分母 h で割る。最後に、割った後の式について、h に０を代入する。時間があれば、このような作業を実行すれば良い。それで微分は完了したことになる。ここでは、９２頁で証明をした以下の公式を用いて、微分に要する時間を節約する。

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

同公式によれば、

211 本書では、使用しないので証明しない。

$$
\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{-100.737x^{10} + 1.9x^9 + 1.9x^8 + \cdots + 1.9x + 101.9}{dx} \\
&= \frac{-100.737x^{10}}{dx} + \frac{1.9x^9}{dx} + \frac{1.9x^8}{dx} + \cdots + \frac{1.9x}{dx} + \frac{101.9}{dx} \\
&= -100.737 \times 10x^9 + 1.9 \times 9x^8 + 1.9 \times 8x^7 + \cdots + 1.9 + 0 \\
&= -1007.37x^9 + 17.1x^8 + 15.2x^7 + \cdots + 1.9
\end{aligned}
$$

となり、微分は完了するので、次の作業に移る。
この微分した式の x に x_1（上記例では 1.2）を代入すれば傾きが求められる。実行すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{df(x_1)}{dx} &= -1007.37x_1^9 + 17.1x_1^8 + 15.2x_1^7 + \cdots + 1.9 \\
&= -1007.37 \times 1.2^9 + 17.1 \times 1.2^8 + 15.2 \times 1.2^7 + \cdots + 1.9 \\
&= -5198 + 74 + 55 + \cdots + 1.9 \\
&= -4954
\end{aligned}
$$

と傾きが求められた。
Excel で計算すると、以下のとおりである。

べき乗	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0
係数	▲ 1007.4	17.1	15.2	13.3	11.4	9.5	7.6	5.7	3.8	1.9	101.9
x	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1.0	0.0
1.2	▲ 5197.8	73.5	54.5	39.7	28.4	19.7	13.1	8.2	4.6	1.9	0.0

$\frac{df(x)}{dx}$
▲ 4954

そうすると、x_2 の値は、これまでに判明した数値を全部代入すれば求められる。

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{df(x_1)}{dx}} \\
&= 1.2 - \frac{-474}{-4954} \\
&= 1.2 - 0.095 \\
&= 1.104 \ldots
\end{aligned}
$$

と具体的に求めることができた（この式を Excel 表の該当セルに記載しておくと、自動的に、x の次の欄に１．１０４と入力されて便利である）。

このx$_2$ は、１５９頁のグラフの 1.2 接線＝赤色直線と x 横軸が交わる地点の x 値である。これを第２番目の x 候補とすれば、$f(x)$ が０を超えないように、マイナス側から（グラフの下側から）$f(x) = 0$ へと近づいたことになる。

以後、同様に、x_2 を$f(x)$ に代入して、新たな座標点である（1.104, ▲141）を求め、その点で$f(x)$ に接する新たな接線（１５９頁のグラフの 1.1 接線＝灰色直線）を求め、同灰色接線と x 横軸が交わる地点について x 値である第３番目の x_3 を求める。

そのようにして、延々と作業を続けていくのであるが、いつまで続ければ良いのかといえば、$f(x)$ の値が０になる迄ということになる。実際に、Excel で計算を続行すると、以下のようになる。

べき乗	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
係数	▲100.7	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	101.9	f(x)
x	x^10	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1.0	
1.2	▲623.7	9.8	8.2	6.8	5.7	4.7	3.9	3.3	2.7	2.3	101.9	▲474
1.104	▲271.5	4.6	4.2	3.8	3.4	3.1	2.8	2.6	2.3	2.1	101.9	▲141
1.043	▲154.0	2.8	2.7	2.6	2.5	2.3	2.3	2.2	2.1	2.0	101.9	▲31
1.021	▲123.8	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	101.9	▲3
1.018	▲120.7	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	1.9	101.9	▲0
1.018	▲120.6	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	1.9	101.9	▲0
1.018	▲120.6	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	1.9	101.9	0
1.018	▲120.6	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	1.9	101.9	0

べき乗	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	
係数	▲1007.4	17.1	15.2	13.3	11.4	9.5	7.6	5.7	3.8	1.9	101.9	$\frac{df(x)}{dx}$
x	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1.0	0.0	
1.2	▲5197.8	73.5	54.5	39.7	28.4	19.7	13.1	8.2	4.6	1.9	0.0	▲4954
1.104	▲2459.0	37.8	30.4	24.1	18.7	14.1	10.2	7.0	4.2	1.9	0.0	▲2311
1.043	▲1476.2	24.0	20.5	17.2	14.1	11.3	8.6	6.2	4.0	1.9	0.0	▲1369
1.021	▲1212.7	20.2	17.6	15.1	12.6	10.3	8.1	5.9	3.9	1.9	0.0	▲1117
1.018	▲1185.1	19.8	17.2	14.8	12.5	10.2	8.0	5.9	3.9	1.9	0.0	▲1091
1.018	▲1184.8	19.8	17.2	14.8	12.5	10.2	8.0	5.9	3.9	1.9	0.0	▲1091
1.018	▲1184.8	19.8	17.2	14.8	12.5	10.2	8.0	5.9	3.9	1.9	0.0	▲1091
1.018	▲1184.8	19.8	17.2	14.8	12.5	10.2	8.0	5.9	3.9	1.9	0.0	▲1091

５回目で Excel 画面上は、ほぼ$f(x)$ の値（右側の列の５行目）は▲０になった（小数点以下３０桁まで０が揃い画面上も通常の０となるのは７回目である)。このときの x の値は、１．０１８…である。すなわち、１５７頁で「不明」としていた社債利回り YTM は、

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + YTM \\
1.018 &= 1 + YTM \\
YTM &= 1.018 - 1 \\
&= 0.018 \\
&= 1.8\%
\end{aligned}
$$

すなわち、１．８％であると算定できた。

なお、以上の計算の仕組みは、Excel の関数で自動化することも可能である。例えば、以下では、１５７頁の設例にならい、初年度期首に１００万７３７０円で発行した社債につ

いて、毎年１万９千円の利払いを１０年間実施し、１０年後に元本１００万円を償還するとした場合の収益率（会社からすれば有利子負債コスト）を、IRR 関数によって、自動計算したものであり、上記同様に、１．８％と計算されている。

経過年数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
金額	▲ 100.7	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	101.9

IRR → 1.82%

以上の議論は、社債が市場で取引されているような企業の話である。

それでは、市場での取引がない場合は、どうするか。この場合は、債券格付けから最終利回りを推定し、有利子負債コストとすることが可能である。[212]

では、投資適格に満たない格付けの企業の価値評価を行うときは、どうするか。この場合は、市場データを用いるのがそもそも適当ではない。そうすると、市場データによる数値を用いる *WACC* による割引実行が適当でなく、結局、*DCF* 法に馴染まないということになる。このような企業の場合は、Unlevered 株主資本コストで割り引く APV 法が推奨されている。[213]

なお、日本の企業の場合は、社債以外の方法（銀行からの直接借入）で借り入れをしている企業も多い。この場合は、過去の借入履歴から有利子負債コストを推定せざるを得ない。例えば、以下のような借入及び支払利息のデータがある場合、[214]

（単位：百万円）

事業年度	期末借入金	平均借入金	支払利息	利子率
2016	1,500	1,525		4.59%
2017	1,550		70	

212　参考文献Ａ上巻３５６頁。参考文献Ｄ２７５～２７６頁。
213　参考文献Ａ上巻３５４頁、３５７～３５８頁。
214　数値設例は、参考文献Ｄ２７６～２７７頁のものを用いた。但し、同書の表では、１年目支払利息とあるが、同書本文では「ある事業年度の支払利息をその事業年度およびその前年の事業年度の平均債務残高で割る」とあり整合しない。平均借入金に対する支払利息の趣旨から、同書本文の方の記述にならい、上記 Excel 表のとおり整理した。

$$
\begin{aligned}
\text{利子率} &= \frac{2017\text{年の支払利息}}{2016\text{〜}2017\text{年の平均借入金}}\\
&= \frac{2017\text{年の支払利息}}{\left(\frac{2016\text{年期末借入金}+2017\text{年期末借入金}}{2}\right)}\\
&= \frac{70}{\left(\frac{1500+1550}{2}\right)}\\
&= \frac{70}{\left(\frac{3050}{2}\right)}\\
&= \frac{70}{1525}\\
&= 0.04590\ldots.\\
&= 4.59\%
\end{aligned}
$$

として、有利子負債コストを算出することになる。

２７　負債 D／株主資本 E

有利子負債 D、株主資本 E は、以上の検討結果から、D/E （ないしは $D/(D+E)$ ）という比率が意味を有することが確認できた。これを、D/E レシオと呼ぶが、１５３頁の図からわかるとおり、同数値は以下の各場面で用いられる。[215]

・上場企業の株式βを Unlevered するとき
　→上場企業の D/E が必要

・Unlevered された上場企業の株式βから非上場企業の株式βを求めるとき
　→非上場上企業の D/E が必要

・非上場上企業の株式βから、加重平均により $WACC$ を求めるとき
　→非上場上企業の $D/(D+E)$ が必要

$WACC$ やβの計算に用いる同比率は、長期的にその企業がその資本比率に収束するとの前提・仮定から成り立っている（それゆえに、その比率を前提とした $WACC$ で将来の FCF を割引計算することができるのである）。D/E の算出は、上記前提・仮定を踏まえつつ、以下の手法が存在している。[216]

① 評価対象企業の現在値を使用する。
② 類似企業または業界の平均値を使用する。
③ 循環計算する。

このうち、①の現在値を使用する場合の具体的注意点は以下のとおりである。

・上場会社であれば、公表された有利子負債総額を参照する。
・β を推計する際に過去の一定期間の株価及び株価指数の変動を計算に用いた以上、D/E レシオについても、同じ推計期間を用いた平均値を採用すべきとする見解もある。もっとも、上場企業の資本構成が数年内に激変することは少ないため、現在の資本構成が不変であるとみなして差し支えない場合が多い。[217]
・事業価値は余剰現金を含まないから、加重平均に用いる有利子負債も余剰現金を含まないものを用いる。[218]　すなわち、短期借入金・長期借入金・未積立退職債務等の負債同等物を足し合わせて、その総額から余剰現金を差し引いて、ネットの有利子負債

215 負債の簿価ではなく、時価である必要性について、本書「１１　$WACC$」
216 参考文献Ｄ２７８～２７９頁。
217 参考文献Ｄ２６６～２６７頁
218 参考文献Ａ上巻３５９頁。他方、参考文献Ｄ２６７頁は、負債の節税効果は純有利子負債ではなく有利子負債の総額について発生することから、有利子負債の時価についても、現金預金等と相殺後の純有利子負債ではなく総額を用いるとする。

額を算出する。
・各社債は個別に評価する。社債の市場価値が入手できない倍は、簿価で評価するか、社債についての DCF 法を用いる。[219]
・普通株式が市場で取引されている場合は、株価に流通株式数を掛けて時価総額を出す。

また、②の類似企業・業界の平均値を使用する場合の注意点は、以下のとおりである。[220]

・加重平均と用いる方法と単純平均を用いる方法がある。
・加重平均を用いる場合、何を指標にとって加重平均するのか決める必要がある。実務上は、時価総額や企業価値をベースに加重平均をする。

最後に、③の循環計算については、株式が上場されていない企業の場合等で用いられる。これは、以下のようなステップを踏む。すなわち、

（１） 現在の有利負債の金額を所与のものとして、暫定的資本構成 D/E を定め、DCF 法により企業価値を求める。
（２） 求めた企業価値に対する有利子負債の割合を再計算し、新たな D/E を用いて再び企業価値の評価をおこなう。
（３） これを繰り返し、評価結果が収束するまで作業を続ける。

とのものである。[221] [222]
この循環計算（正確には、繰り返し計算）は具体的には以下のとおりである。[223]

上場企業である TOYOTA 社 と同業の非上場企業Ａ社について、適正な D/E 比を求めたい。TOYOTA 社 の Unlevered βは、上述した計算の結果、０．７２９５…であるとする。

TOYOTA		
株式β		1.15
有利子負債		19,155,727,000,000
株価	7,155	
株式数	3,262,997,492	
株主資本時価		23,346,747,055,260
実効税率		29.74%
Unlevered β		0.7295

219 参考文献Ａ上巻３６１頁
220 参考文献Ｄ２７８頁
221 参考文献Ａ上巻３６２頁
222 参考文献Ｄ２７９頁
223 文献類には計算手順の具体例記載はないが、趣旨から、設例と計算手順を推測した。

最初に、Ａ社の現在の有利負債の金額（１０００億円とする）及び株式簿価（５００億円とする）を所与のものとして、暫定的資本構成 D/E を定める（１０００÷５００＝２）。かかる D/E 比を前提に、TOYOTA 社 の Unlevered βを、日本公認会計士協会推奨の公式を用いて、Ａ社のβに変換すると、

$$\beta_e = \beta_u\left\{1 + (1 - T)\frac{D}{E}\right\}$$
$$= 0.7295 \times \{1 + (1 - 0.2974) \times 2\}$$
$$= 0.7295 \times (1 + 0.7026 \times 2)$$
$$= 0.7295 \times (1 + 1.4052)$$
$$= 0.7295 \times 2.4052$$
$$= 1.7545 \ldots$$

である。
この非上場企業Ａのβ値を基にして、株主資本コスト ke を計算する。ここで、リスク・フリー・レートを１％、マーケット・リスク・プレミアムが７％であるとすると、

rf	1%
rm-rf	7%

CAPM の公式において、

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_m) - r_f)$$
$$k_e = r_f + \beta_e(r_m - r_f)$$
$$= 0.01 + 1.7545 \times 0.07$$
$$= 13.28\%$$

となる。
この株主資本コスト ke を基にして、$WACC$ を計算する。借入コスト kd（金利）を２％とすると、先ほど、現在の有利負債の金額（１０００億円）及び株式簿価（５００億円）を所与のものとして、暫定的資本構成 D/E を定めているので、

$$WACC = \frac{D}{D+E}k_d(1 - T) + \frac{E}{D+E}k_e$$
$$= \frac{1000}{1000 + 500} \times 2\% \times (1 - 0.2974) + \frac{500}{1000 + 500} \times 13.28\%$$
$$= \frac{2}{3} \times 2\% \times 0.7026 + \frac{1}{3} \times 13.28\%$$
$$= 0.9368\% + 4.4266\%$$
$$= 5.36\%$$

となる。
すなわち、暫定的資本構成 D/E＝２ を基準に $WACC$ を計算すると、５．３６％となる。

A社	有利子負債	1000
	金利	2%
	株主資本時価	500
	D/E	2.000
	株式β	1.7545
	株主資本コストke	13.28%
	WACC	5.36%

この $WACC$ を利回り R として用いて、FCF の現在価値を求めてみる。

ここで、A社の中期経営計画を参考に、各年の FCF を算定する。例えば、３１頁設例と似た FCF として、以下の Excel 表のとおり、１年目が４４億円、２年目が４８億円と前期比９％で増加していく場合を考える。個別予測期間である５年を経過した後は、FCF は前期比２％の増加率にまで低減し、以後、同じ比率での永久成長が続くものとする。これら FCF の割引率には、先ほどの $WACC$ を用いるので、FCF_1 の割引率は、

$$\begin{aligned}1+WACC &= 1+0.0536\\ &= 1.0536\\ &= 105.36\%\end{aligned}$$

となる。同様に、FCF_2 の割引率は、

$$\begin{aligned}(1+WACC)^2 &= (1+0.0536)^2\\ &= 111.02\%\end{aligned}$$

となる。

以下、同様に各 FCF の割引率を求めて、各 FCF を割り引くと、以下の表の中段「FCF の現在価値」のとおり１～５年分の現在価値が、４１億円、４３億円、４４億円、４６億円及び４８億円と求められる。

計画時からの年数	年	1	2	3	4	5	6		
みなし税引後営業利益	億円	120	131	143	155	169	185	A	前期比９%増
純投資	億円	76	83	91	99	108	117	B	前期比９%増
ＦＣＦ	億円	44	48	52	57	62	67	C	=A-B
割引率	率	105.36%	111.02%	116.97%	123.25%	129.86%		D	WACC+1
ＦＣＦの現在価値	億円	41	43	44	46	48		E	=C/D

R	5.36%	F	WACC
g_n	2.00%	G	前期比2%増
R-g	3.36%	H	=F-H
FCF_6	75	I	=第６期FCF(調整後)
$(1+R)^5$	129.86%	J	$=(1+WACC)^5$
TV(終価、残存価値)	2,224	K	=I/H
継続価値	1,713	L	=K/J

41	１年目FCF現価
43	２年目FCF現価
44	３年目FCF現価
46	４年目FCF現価
48	５年目FCF現価
1,713	継続価値
1,935	合計価値

そして、残存価値 TV の現在価値（継続価値）は、３０頁（二分法）により計算すると、

$$\frac{TV}{(1+R)^5}$$

$$=\frac{\frac{FCF_6}{R-g_n}}{(1+R)^5}$$

$$=\frac{FCF_6}{(R-g_n)(1+R)^5}$$

$$=\frac{FCF_6}{(WACC-g_n)(1+WACC)^5}$$

$$=\frac{75}{(5.36\%-2\%)(1+5.36\%)^5}$$

$$=1713$$

であるから、合計すると、事業価値 V は、１９３５億円の現在価値と計算できる。

これを、先ほど、所与の値とした有利負債の金額（１０００億円）及び株式簿価（５００億円）の合計額である１５００億円と比べると、４３５億円も上回っていることがわかる。

V	1,935
D+E	1,500
Δ	435

これは、当初想定した有利子負債の金額及び株式価値の時価合計額が控えめすぎたこと

を意味する。そこで、

$$V = D + E$$

をみたすように、当初想定の時価を変更する必要がある。もっとも、有利子負債 D は、契約によって定められた元本と利息支払義務しか負わない資金源であるから、これ以上は時価をあげようがない。よって、時価評価をあげるべきは、E ということになる。つまり、E の時価を当初の５００億円から４３５億円だけ上積みすればよいので、

$$\begin{aligned} E_{2nd} &= E + 435 \\ &= 500 + 435 \\ &= 935 \end{aligned}$$

として、二回目用のE_{2nd} に加算修正してみる。この結果、暫定的資本構成 D/E＝２　は、二回目試行のための資本構成 D/E_{2nd} ＝１．０７へと変化する。それに対応して、株式β値、資本コスト ke、$WACC$ も以下の表のとおり変化する。

A社	有利子負債	1000
	金利	2%
	株主資本時価	935
	D/E	1.070
	株式β	1.2778
	株主資本コストke	9.94%
	WACC	5.53%

この 2nd version の $WACC$ で、各 FCF 及び残存価値 TV を割り引いて現在価値を求めると、以下のとおり、１８４０億円となる。

2nd

割引率	率	105.53%	111.37%	117.53%	124.03%	130.89%		D	WACC+1
ＦＣＦの現在価値	億円	41	43	44	46	47		E	=C/D

R	5.53%	F	WACC
g_n	2.00%	G	前期比2%増
R-g	3.53%	H	=F-H
FCF_6	75	I	=第６期FCF(調整後)
$(1+R)^5$	130.89%	J	$=(1+WACC)^5$
TV(終価、残存価値)	2,119	K	=I/H
継続価値	1,619	L	=K/J

41	１年目FCF現価
43	２年目FCF現価
44	３年目FCF現価
46	４年目FCF現価
47	５年目FCF現価
1,619	継続価値
1,840	合計価値

今度は、残念ながら、９５億円ほど行き過ぎてしまったようである。

V	1,840
D+E	1,935
Δ	▲ 95

そこで、E_{2nd}の時価を９３５億円から９５億円減算してみる。

$$
\begin{aligned}
E_{3rd} &= E_{2nd} - 95 \\
&= 935 - 95 \\
&= 840
\end{aligned}
$$

この結果、D/Eは３回目試行のためのD/E_{3rd} へと変化し、株式β値、資本コストke、$WACC$も以下の表のとおり変化する。

A社	有利子負債	1000
	金利	2%
	株主資本時価	840
	D/E	1.191
	株式β	1.3397
	株主資本コストke	10.38%
	WACC	5.50%

この後は、同様の作業を続ける。すなわち、新たに算出された$WACC$ で事業価値Vを算出し、$D+E$ と比べる。差があれば、Eの時価を加減調整し、新たに$WACC$を定めて同じ作業を継続する。いつまで続けるのかというと、

$$V = D + E$$

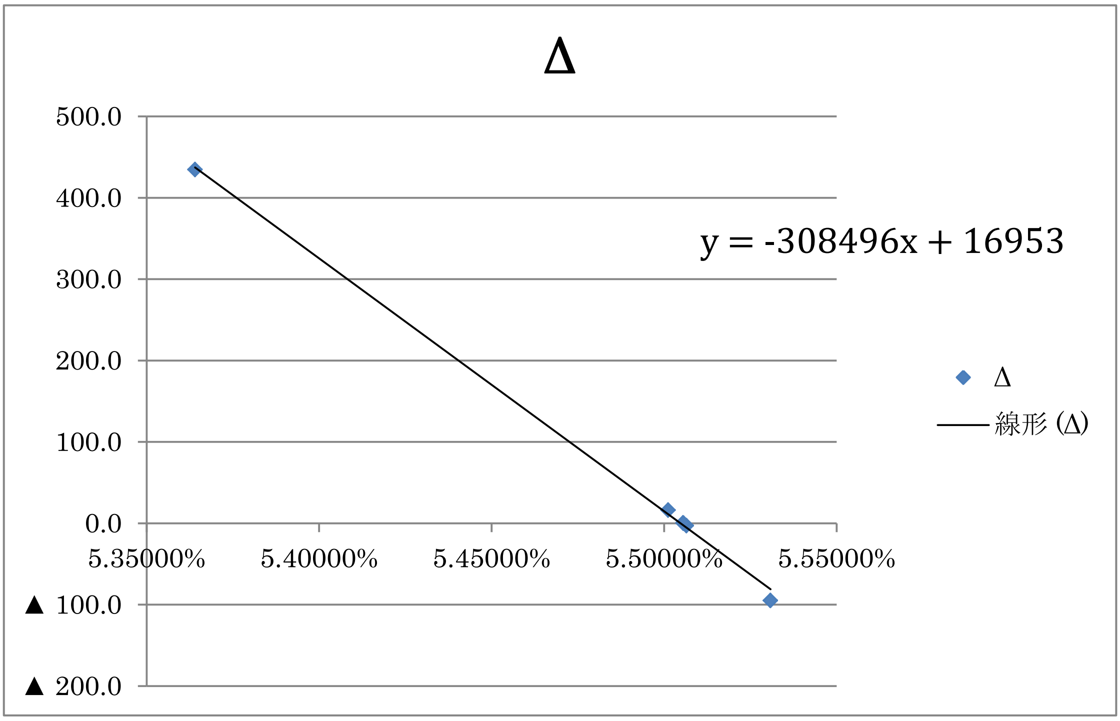
が成立するまで（つまり両者の誤差⊿が０になるまで）、延々と続けるのである。

そして、実際に誤差が０になるまで続けてみた結果が、以下の表である。

	WACC	Δ	V	D/E
1st	5.36405%	434.7	1,934.7	2.000
2nd	5.53083%	▲ 94.8	1,839.9	1.070
3rd	5.50117%	16.2	1,856.1	1.191
4th	5.50645%	▲ 2.9	1,853.2	1.168
5th	5.50551%	0.5	1,853.7	1.172
6th	5.50568%	▲ 0.1	1,853.6	1.171
7th	5.50565%	0.0	1,853.6	1.171

Ａ社の場合、７回目の試行で、誤差⊿は、ほぼ０となった。[224]
このときの *WACC* は５．５０５６５％、事業価値は１８５４億円であり、*D/E* は１．１７である。全要素が一度に決定されるのが、この循環計算法の特色である。

念のため、視覚化しておくと、以下のようなグラフとなる（横軸 *WACC*。縦軸が誤差⊿）。試行回数が積み重なるほどに、直線上を振り子のように行き来し、次第にその振り幅を狭めて、誤差⊿が０になるように近づいていることが分かる。



[224] 単位が１億円なので、まだ数百万円程度の端数は残っている。これを更に続けて１円未満にすることも可能であるが、本書では省略した。

なお、一般に、数列の極限は、

１、（有限の値に）収束する
２、正の無限大に発散する
３、負の無限大に発散する
４、その他（収束もせず発散もせず振動を繰り返す）

のいずれかである。今回の数列が収束したのは、数列⊿

$$V_n - (D + E_n)$$

の形が収束に適したものであったためである。

以上